



**TUGAS AKHIR – SM141501**

**ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIDRODINAMIK  
VISKOELASTIS TERSUSPENSI YANG MELEWATI PELAT  
DATAR**

RINA SAHAYA  
1212100080

Dosen Pembimbing :

1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, MI.Komp.

JURUSAN MATEMATIKA

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016



**FINAL PROJECT – SM141501**

***MAGNETOHYDRODYNAMIC SUSPENDED VISCOELASTIC  
FLUID FLOW THROUGH A FLAT PLATE***

RINA SAHAYA  
NRP 1212 100 080

Supervisor I  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
Supervisor II  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics and Natural Science  
Sepuluh Nopember Institute Technology  
Surabaya 2016

**LEMBAR PENGESAHAN**

**ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIDRODINAMIK  
VISKOELASTIS TERSUSPENSI YANG MELEWATI  
PELAT DATAR**

**MAGNETOHYDRODYNAMIC SUSPENDED VISCOELASTIC  
FLUID FLOW THROUGH A FLAT PLATE**


Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
Pada Bidang Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

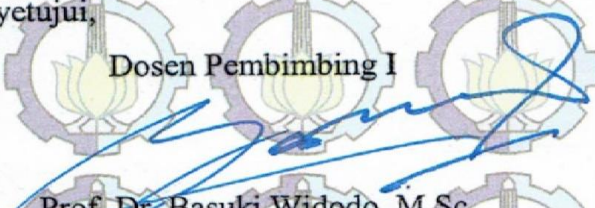
Oleh :  
**RINA SAHAYA**  
**NRP. 1212 100 080**

Menyetujui,


Dosen Pembimbing II

Dosen Pembimbing I

  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.  
NIP. 19611115 198703 1 003

  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
NIP. 19650605 198903 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA ITS

  
Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT  
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2016

# **ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIDRODINAMIK VISKOELASTIS TERSUSPENSI YANG MELEWATI PELAT DATAR**

Nama : Rina Sahaya  
NRP : 1212100080  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Pembimbing : 1. Prof. DR. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Chairul Imron, MI.Komp.

## **Abstrak**

Fluida viskoelastis adalah salah satu tipe dari fluida non-Newtonian yang memiliki sifat viskos(kental) dan elastis. Aplikasi dari fluida viskoelastis sangat penting terutama pada industri pertahanan, pengeboran minyak, dan industri makanan, sehingga banyak penelitian yang dilakukan tentang fluida viskoelastis. Salah satu pembahasan yang menarik untuk dikaji adalah aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis dengan adanya partikel suspensi didalamnya. Aliran fluida tersebut mengalir dari bawah dan melewati pelat datar yang kemudian menimbulkan lapisan batas (*boundary layer*). Persamaan lapisan batas tersebut kemudian ditransformasikan kebentuk non-dimensional menggunakan variabel non-dimensional, selanjutnya diubah ke persamaan similaritas menggunakan fungsi alir (*stream function*). Persamaan similaritas tersebut kemudian diselesaikan secara numerik menggunakan metode Keller-Box. Hasil numerik yang diperoleh kemudian disimulasikan dan dianalisis pengaruh parameter bilangan Prandtl, viskoelastik, magnetik dan nilai densitas partikel suspensi terhadap profil kecepatan dan profil temperatur. Dari hasil simulasi, kecepatan ( $f'$ ) mengalami peningkatan ketika parameter viskoelastik ( $K$ ), variasi bilangan Prandtl ( $Pr$ ), parameter magnetik( $M$ ) mengalami penurunan, dan variasi nilai densitas partikel suspensi ( $N$ ) mengalami peningkatan. Sedangkan temperatur ( $\theta$ ) meningkat dengan meningkatnya

parameter viskoelastik ( $K$ ) dan parameter magnetik ( $M$ ), dan menurun dengan meningkatnya variasi bilangan Prandtl ( $Pr$ ) dan nilai densitas partikel suspensi ( $N$ ).

***Kata kunci*** : *Magnetohidrodinamik, Fluida Viskoelastis, Suspensi, Keller-Box.*

# MAGNETOHYDRODINAMIC SUSPENDED VISCOELASTIC FLUID FLOW THROUGH A FLAT PLATE

Name : Rina Sahaya  
NRP : 1212100080  
Department : Matematika FMIPA-ITS  
Supervisor : 1. Prof. DR. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

## Abstract

*Viscoelastic fluid is one of non-Newtonian fluid type that has characteristics of a viscous and elastic. Application of viscoelastic fluid is needed on the industrial field, it's cause many research about viscoelastic fluid. The one interesting topics is magnetohydrodynamics viscoelastic fluid flow with particles suspense. The fluid flow flowing from bottom then through a then raises boundary layer. The boundary layer equation changed in to non-dimentional form use non-dimentional variables and then transformed to the similarity equation use stream function. Then be solved numerically using the Finite Difference Method Keller-Box. The numerically result then will simulated and analized the parameter Prandtl number, viscoelastic, magnetic, and number density of paticles suspense for know the velocity and temperature profile. From the simulation, the velocity profile will increase when the viscoelastic parameter(K), the Prandtl number (Pr), the magnetic parameter (M) decrease, and the number density of paticles suspense (N) increase. The temperature profile will increase when the viscoelastic parameter(K) and the magnetic parameter (M) increase, and will decrease when number (Pr) and the number density of paticles suspense(N) increase.*

**Keywords :** *Magnetohydrodynamic, Viscoelastic Fluid, Suspense, Keller-Box.*

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **KATA PENGANTAR**

Alhamdulillahirobbil'alamin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

### **“ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIDRODINAMIK VISKOELASTIS TERSUSPENSI YANG MELEWATI PELAT DATAR”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT sebagai Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Bapak Prof. DR. Basuki Widodo, M.Sc dan Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. sebagai dosen pembimbing yang telah memberikan motivasi dan pengarahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si sebagai Kaprodi S1 Jurusan Matematika.
4. Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si sebagai dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah di Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
5. Bapak Dr. Hariyanto, M.Si , Ibu Dra.Titik Mudjiati, M.Si dan Ibu Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si sebagai dosen penguji yang telah memberikan banyak saran demi perbaikan Tugas Akhir ini.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.



7. Kedua orang tua saya, Bapak Abdul Manap dan Ibu Kasmonah yang telah memberikan dukungan secara moral maupun materi.
8. Gadis, Nina, Ella, Lala, Devi, Nana, Yunita, Cendy dan semua teman-teman MATEMATIKA angkatan 2012 yang selalu memberi dukungan dan motivasi.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih mempunyai banyak kekurangan, untuk itu pula dalam kesempatan ini penulis meminta maaf sebesar-besarnya atas segala kekurangan yang ada. Kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun juga sangat diharapkan sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang.

Surabaya, Juli 2016

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK.....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR SIMBOL.....	xvii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xix
 BAB I PENDAHULUAN.....	 1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	 7
2.1 Penelitian Terdahulu.....	7
2.2 Fluida.....	8
2.3 <i>Magnetohydrodynamic</i> (MHD).....	8
2.4 Suspensi.....	10
2.5 Viskositas.....	10
2.6 Lapisan Batas ( <i>Boundary Layer</i> ).....	10
2.7 Persamaan Pembangunan.....	11
2.8 Persamaan Similaritas.....	12
2.9 Metode Keller-Box.....	12
 BAB III METODE PENELITIAN.....	 15
3.1 Tahapan Penelitian.....	15
3.2 Diagram Alir Metode Penelitian.....	17

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	19
4.1 Persamaan Pembangun Dimensional.....	19
4.2 Persamaan Pembangun Non-Dimensional.....	22
4.3 Persamaan Similaritas.....	23
4.4 Penyelesaian Numerik.....	24
4.4.1 Transformasi Menjadi Persamaan Orde Pertama.....	24
4.4.2 Diskritisasi Model.....	25
4.4.3 Linearisasi Model.....	26
4.4.4 Teknik Eliminasi Blok.....	30
4.5 Hasil Simulasi.....	37
4.5.1 Pengaruh Viskoelastik ( $K$ ) terhadap Profil Kecepatan ( $f'$ ) dan Temperatur ( $\theta$ ) .....	38
4.5.2 Pengaruh Magnetik ( $M$ ) terhadap Profil Kecepatan( $f'$ ) dan Temperatur ( $\theta$ ).....	39
4.5.3 Pengaruh Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) terhadap Profil Kecepatan( $f'$ ) dan Temperatur( $\theta$ ).....	41
4.5.4 Pengaruh Nilai Densitas Partikel Suspensi( $N$ ) terhadap Profil Kecepatan( $f'$ ) dan Temperatur( $\theta$ ).....	42
BAB V PENUTUP	45
5.1 Kesimpulan.....	45
5.2 Saran.....	46
DAFTAR PUSTAKA.....	49
LAMPIRAN.....	51
BIODATA PENULIS.....	75

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Grafik Tegangan Geser Fluida Newtonian dan Non-Newtonian.....	1
Gambar 2.1	Lapisan Batas pada Pelat Datar.....	11
Gambar 2.2	Stensil Skema Keller-Box.....	14
Gambar 3.1	Diagram Alir Penelitian.....	17
Gambar 4.1	Sketsa Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Viskoelastis Tersuspensi yang Melewati Pelat Datar.....	19
Gambar 4.2	Stensil Beda Hingga.....	25
Gambar 4.3	Variasi Parameter Viskoelastik ( $K$ ) pada Profil Kecepatan ( $f'$ ).....	38
Gambar 4.4	Variasi Parameter Viskoelastik ( $K$ ) pada Profil Temperatur ( $\theta$ ).....	39
Gambar 4.5	Variasi Parameter Magnetik ( $M$ ) pada Profil Kecepatan ( $f'$ ).....	40
Gambar 4.6	Variasi Parameter Magnetik ( $M$ ) pada Profil Temperatur ( $\theta$ ).....	40
Gambar 4.7	Variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) pada Profil Kecepatan ( $f'$ ) .....	41
Gambar 4.8	Variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) pada Profil Temperatur ( $\theta$ ).....	42
Gambar 4.9	Variasi Number Densitas Partikel Suspensi( $N$ ) pada Profil Kecepatan ( $f'$ )..	43
Gambar4.10	Variasi Number Densitas Partikel Suspensi( $N$ ) pada Profil temperatur ( $\theta$ )...	43

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR SIMBOL

$\rho$	Kerapatan Fluida
$g$	Gravitasi
$K$	Parameter viskoelastis
$U_{\infty}$	Kecepatan aliran bebas
$U_w$	Kecepatan aliran pada permukaan pelat
$u$	Komponen kecepatan pada sumbu $x$
$v$	Komponen kecepatan pada sumbu $y$
$x$	Koordinat arah gerak pada permukaan
$y$	Koordinat arah gerak pada permukaan
$\theta$	Profil temperatur
$B$	Gaya magnetik
$T_w$	Temperatur permukaan
$T_{\infty}$	Temperatur lingkungan
$\psi$	Fungsi alir
$M$	Parameter magnetik
$\mu_0$	Viskositas dinamik
$k_0$	Koefisien memori pendek
$K_1$	Koefisien hambat stoke
$N$	Nilai densitas partikel suspensi
$H$	Kecepatan fluida tersuspensi
$\lambda$	Parameter konveksi
$\alpha$	Difusi termal
$\beta$	Koefisien perpindahan panas
$T$	Temperatur fluida
$w$	Ketebalan pelat
$l$	Panjang Pelat
$Pr$	Bilangan prandtl
$I$	Matriks identitas

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR LAMPIRAN

LAMPIRAN 1	Penambahan Efek Magnetik kedalam Persamaan Pembangun.....	51
LAMPIRAN 2	Pengubahan Persamaan Pembangun ke Persamaan Non-Dimensional.....	53
LAMPIRAN 3	Transformasi Persamaan Non-Dimensional ke Persamaan Similaritas.....	59
LAMPIRAN 4	<i>Source Code</i> Program Menggunakan <i>software</i> MATLAB.....	66



*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

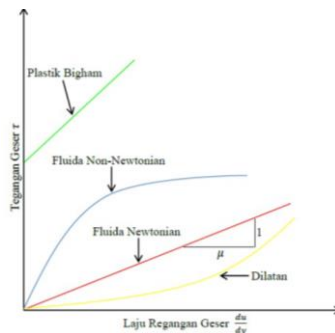
# BAB I

## PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh.

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun kecilnya tegangan geser tersebut. Fluida sendiri berdasarkan viskositasnya dibagi menjadi dua yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian. Fluida Newtonian merupakan fluida yang memiliki kurva tegangan yang linier dan memiliki viskositas yang bernilai konstan apabila terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Sedangkan fluida non-newtonian merupakan fluida yang memiliki kurva tegangan yang tidak linier atau dengan kata lain tidak memenuhi hukum linierisasi newton dan memiliki viskositas yang bernilai tidak konstan apabila terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut[4]. Berikut adalah grafik tegangan geser fluida Newtonian dan non-Newtonian[10] :



Gambar 1.1 Grafik Tegangan Geser Fluida Newtonian dan Non-Newtonian

*Magnetohydrodynamic* (MHD) adalah studi mengenai dinamika fluida konduksi listrik akibat medan magnet. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. Konsep dasar MHD adalah medan magnet dapat menginduksi arus listrik pada fluida konduktif yang bergerak, yang pada gilirannya menciptakan gaya pada fluida dan juga mengubah medan magnet itu sendiri. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan Maxwell pada elektromagnetik[5].

Suspensi adalah suatu campuran fluida yang mengandung partikel padat atau campuran heterogen dari zat cair dan zat padat yang dilarutkan dalam zat cair tersebut, namun masih dapat dibedakan antara pelarut dan zat yang dilarutkan. Partikel padat dalam sistem suspensi umumnya lebih besar dari 1 mikrometer[8].

Fluida viskoelastis adalah salah satu fluida non-Newtonian selain fluida pseudoplastic, fluida rheopectic dan fluida thixotropic. Dalam beberapa tahun ini, penelitian untuk permasalahan fluida viskoelastis menjadi sangat penting karena pemanfaatannya yang sangat luas dan bisa digunakan untuk pengembangan ilmu sains maupun teknik. Meskipun banyak peneliti melakukan penelitian terhadap fluida yang bersifat viskoelastis seperti Kasim[7] dan Wanti [6], namun penelitian tentang fluida viskoelastis tersuspensi masih kurang. Hal ini yang mendasari peneliti tertarik meneliti permasalahan aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, dibuatlah rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar ?
2. Bagaimana penyelesaian model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar ?

3. Bagaimana hasil simulasi dari aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar ?

### 1.3 Batasan Masalah

Dalam tugas akhir ini, diberikan batasan masalah sebagai berikut .:

1. Fluida yang diamati adalah fluida viskoelastis.
2. Benda yang diteliti adalah pelat datar.
3. Pelat yang diamati memiliki ketebalan sangat tipis dibandingkan panjang pelat ( $w \ll l$ ).
4. Aliran yang diamati bersifat *incompressible* (mempunyai massa jenis konstan).
5. Aliran yang diamati dalam kondisi *steady*.
6. Bagian yang diteliti yaitu pada titik stagnasi ( $x \approx 0$ ).
7. Aliran fluida bersifat seragam.
8. Kecepatan gravitasi bumi relatif kecil jika dibandingkan dengan kecepatan fluida ( $g = 0$ ).
9. Fluida diinduksi oleh medan magnet.
10. Temperatur dinding konstan.
11. Penyelesaian numerik menggunakan skema Metode Beda Hingga Keller-Box.
12. Visualisasi hasil penelitian menggunakan *software* MATLAB

### 1.4 Tujuan

Tujuan tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar.
2. Menyelesaikan model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar.

3. Menganalisa hasil simulasi pengaruh magnetohidrodinamik pada aliran fluida viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar.

## 1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari tugas akhir ini adalah sebagai bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan, khususnya aplikasi Keller-Box pada permasalahan aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini adalah:

### BAB I Pendahuluan

Berisi diskripsi umum isi Tugas Akhir yang meliputi latar belakang masalah, batasan masalah, asumsi, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan Tugas Akhir.

### BAB II Tinjauan Pustaka

Membahas dasar teori yang menjadi landasan dalam penyusunan tugas akhir. Dasar teori ini terdiri dari penelitian sebelumnya, fluida, *magneto hydrodynamics*, suspensi, viskositas, lapisan batas, persamaan pembangun yang terdiri dari persamaan kontinuitas, momentum dan energi, persamaan similaritas dan metode beda hingga Keller-Box.

### BAB III Metode Penelitian

Menjelaskan metode penyelesaian permasalahan yang telah dirumuskan pada Bab I.

### BAB IV Hasil dan Pembahasan

Berisi pembahasan mengenai persamaan pembangun yang terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi dengan penyelesaiannya menggunakan metode Keller-Box, serta analisis hasil simulasi.

## BAB V Penutup

Pada bab ini akan dibahas mengenai kesimpulan dari tugas akhir ini dan saran untuk penelitian selanjutnya.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian-penelitian sebelumnya, fluida, *magneto hydrodynamics*, suspensi, viskositas, lapisan batas, persamaan pembangun yang terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi, persamaan similaritas dan metode beda hingga Keller-Box.

#### **2.1 Penelitian Terdahulu**

Pada penelitian yang dilakukan oleh Wanti(2015)[6] menjelaskan tentang penyelesaian fluida viskoelastis yang melewati sebuah pelat datar dengan efek magnetohidrodinamik menggunakan skema metode beda eksplisit. Hasil penelitian tersebut adalah profil kecepatan akan mengalami penurunan ketika parameter viskoelastik (kekentalan), bilangan prandtl, variasi parameter MHD meningkat. Profil temperatur akan meningkat ketika parameter viskoelastik (kekentalan) dan variasi parameter MHD meningkat, sedangkan bilangan prandtl menurun.

Selain itu, penelitian lain juga dilakukan oleh Kasim(2014)[7]. Penelitian ini menjelaskan tentang fluida viskoelastis pada pelat datar untuk masalah Blasius mengelilingi silinder sirkular dan bola dengan dua jenis aliran konveksi, yaitu konveksi bebas dan campuran. Hal ini diselesaikan dengan menggunakan skema metode beda hingga Keller-Box. Hasil yang diperoleh adalah kecepatan dan nilai *skin friction* menurun selama temperatur meningkat pada nilai parameter viskoelastis. Pada kasus dinding temperatur, nilai perpindahan panas menurun terhadap kenaikan nilai parameter viskoelastis. Sedangkan untuk flux panas yang konstan, nilai perpindahan panas meningkat pada penambahan nilai parameter viskoelastis. Pengaruh bilangan Prandtl pada fluida viskoelastis adalah menurunkan profil kecepatan dan temperatur.



## 2.2 Fluida

Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun kecilnya tegangan geser tersebut [4]. Fluida sendiri berdasarkan viskositasnya dibagi menjadi dua yaitu :

1. Fluida Newtonian (istilah dari nama Isaac Newton) adalah suatu fluida yang memiliki kurva tegangan/regangan yang linier. Contoh umum dari fluida yang berkarakteristik newtonian adalah air. Keunikan dari fluida newtonian adalah fluida ini akan terus mengalir apabila terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Hal ini disebabkan karena viskositas dari suatu fluida newtonian tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Viskositas dari suatu fluida newtonian hanya bergantung pada temperatur dan tekanan. Viskositas sendiri merupakan suatu konstanta yang menghubungkan besar tegangan geser dan gradien kecepatan pada persamaan

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \text{ (linear)}$$

dengan       $\tau$             : tegangan geser fluida  
                   $\mu$             : viskositas fluida  
                   $\frac{\partial v}{\partial x}$         : gradient kecepatan yang arahnya lurus  
                  dengan arah geser

2. Fluida non-Newtonian adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini menyebabkan fluida non-Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan dan laju deformasi berlangsung tak linier atau dengan kata lain tidak memenuhi hukum linier Newton.

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \text{ (tak linear)}$$

## 2.3 Magnetohydrodynamic (MHD)

*Magnetohydrodynamic* (MHD) adalah studi mengenai dinamika fluida konduksi listrik akibat medan magnet [5]. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air

garam atau elektrolit. Konsep dasar MHD adalah medan magnet dapat menginduksi arus listrik pada fluida konduktif yang bergerak, yang pada gilirannya menciptakan gaya pada fluida dan juga mengubah medan magnet itu sendiri. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan Navier-Stokes pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik. Persamaan diferensial MHD harus diselesaikan secara simultan, baik itu penyelesaian secara analitik maupun numerik.

Bentuk ideal persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida, yakni persamaan kontinuitas, persamaan momentum, persamaan energi, dan persamaan Maxwell. Selanjutnya, diberikan  $B$  adalah medan magnet,  $E$  adalah medan listrik,  $V$  adalah kecepatan massal plasma,  $J$  adalah kerapatan arus,  $\rho$  adalah massa jenis fluida/plasma,  $p$  adalah tekanan plasma, dan  $t$  adalah waktu.

Persamaan kontinu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Persamaan momentum:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla \right) V = J \times B - \nabla p$$

Gaya Lorentz dengan suku  $J \times B$  dapat diberikan sebagai berikut:

$$J \times B = \frac{(B \cdot \nabla) B}{\mu_0} - \nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

dengan suku pertama pada sisi kanan adalah gaya tegangan magnetik dan suku kedua adalah gaya tekan magnetik. Hukum Ohm ideal untuk plasma diberikan oleh:

$$E + V \times B = 0$$

Sedangkan hukum Faraday:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E$$

Hukum Ampere untuk frekuensi rendah dengan pengabaian perpindahan arus diberikan oleh:

$$\mu_0 J = \nabla \times B$$

Kendala magnetic divergen:

$$\nabla \cdot B = 0$$

Persamaan energi diberikan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

dengan  $\gamma = 5/3$  adalah rasio spesifik panas untuk persamaan adiabatik dari sistem. Persamaan energi tersebut, diasumsikan entropi dari elemen fluida tidak berubah.

## 2.4 Suspensi

Suspensi adalah suatu campuran fluida yang mengandung partikel padat atau campuran heterogen dari zat cair dan zat padat yang dilarutkan dalam zat cair tersebut, namun masih dapat dibedakan antara pelarut dan zat yang dilarutkan. Partikel padat dalam sistem suspensi umumnya lebih besar dari 1 mikrometer[8].

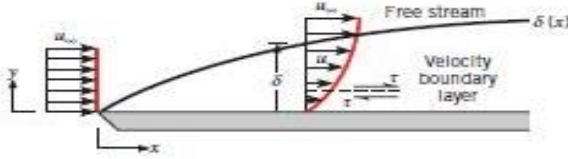
## 2.5 Viskositas

Viskositas atau kekentalan adalah kemampuan suatu fluida untuk mempertahankan bentuk terhadap deformasi bertahap oleh tegangan geser atau tegangan tarik. Viskositas disebabkan oleh adanya gesekan antar partikel (yang bergerak dengan kecepatan berbeda) pada suatu fluida[4].

## 2.6 Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

*Boundary layer* adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat tempat fluida mengalir, dimana di dalam lapisan tersebut pengaruh viskositas maupun gaya inersia sangat berpengaruh[6]. Untuk menggambarkan konsep lapisan batas, lihat Gambar 2.1 lapisan batas pada pelat datar. Ketika partikel fluida melewati permukaan pelat, maka kecepatan berkurang. Pada keadaan tersebut diasumsikan bahwa kecepatan partikel adalah nol. Partikel-partikel ini kemudian menghambat gerakan partikel pada lapisan fluida yang berdekatan, kemudian juga menghambat gerakan partikel pada lapisan berikutnya, dan seterusnya sampai pada jarak  $y = \delta$  dari permukaan. Perlambatan dari gerakan fluida

ini berkaitan dengan tegangan geser (*shear stresses*)  $\tau$  pada bidang yang sejajar dengan kecepatan fluida (Gambar 2.1). Dengan meningkatnya jarak  $y$  dari permukaan,  $x$  komponen kecepatan dari fluida,  $u$ , harus meningkat hingga mendekati nilai aliran bebas  $u_\infty$ . Simbol  $\infty$  digunakan untuk menunjukkan bahwa kondisi aliran bebas (*free stream*) berada di luar lapisan batas.



Gambar 2.1 Lapisan Batas pada Pelat Datar

Simbol  $\delta$  merupakan ketebalan lapisan batas dan dapat didefinisikan sebagai nilai  $y$  ketika nilai  $u = 0.99u_\infty$ . Kecepatan lapisan batas mengacu pada letak di mana  $u$  bervariasi dengan  $y$  melalui lapisan batas. Dengan demikian, aliran fluida ditandai oleh dua kondisi yang berbeda, lapisan tipis fluida ketika kecepatan dan tegangan geser dalam jumlah besar dan berada di luar lapisan batas ketika kecepatan dan tegangan geser dapat diabaikan (dalam jumlah kecil).

## 2.7 Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi. Berikut uraian persamaan aliran fluida viskoelastis dalam kondisi *steady*[7] :

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.1)$$

2. Persamaan Momentum

pada sumbu  $\bar{x}$  :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) \quad (2.2)$$

pada sumbu  $\bar{y}$  :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) \quad (2.3)$$

### 3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.4)$$

## 2.8 Persamaan Similaritas

Persamaan similaritas merupakan persamaan yang diperoleh dengan cara menurunkan persamaan berdimensi  $n$  menjadi berdimensi  $n-1$ . Untuk membentuk sebuah persamaan similaritas pada pelat datar dibutuhkan fungsi alir [7] sebagai berikut :

$$\psi = U_\infty x v(2)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad \eta = \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} y$$

dengan

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

## 2.9 Metode Keller-Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik penyelesaian numerik pada lapisan batas. Metode ini merupakan metode implisit. Langkah-langkah penyelesaian numerik menggunakan Keller-Box adalah sebagai berikut[1] :

1. Mengubah persamaan diferensial orde tinggi menjadi orde satu  
Langkah awal metode Keller-Box adalah mengubah persamaan orde tinggi ke orde satu. Berikut adalah contohnya  
Diberikan persamaan orde dua sebagai berikut :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

dengan mendefinisikan

$$z = \frac{\partial T}{\partial y}$$

maka persamaan orde dua tersebut dapat ditulis :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial z}{\partial y}$$

2. Diskritisasi model matematika

Diskritisasi model dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga pusat terhadap sumbu x dan y.

$$\left( \right)_j^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \right)_j^n + \left( \right)_j^{n-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\left( \right)_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[ \left( \right)_j^n + \left( \right)_{j-1}^n \right]$$

Untuk fungsi  $\left( \right)$  pada umumnya

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k_n}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{u_j^{n-\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n-\frac{1}{2}}}{h_j}$$

3. Linierisasi dengan *Newton Method*

Untuk melakukan linearisasi, dikenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut :

$$f_j^{(i+1)} = f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)}$$

$$u_j^{(i+1)} = u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)}$$

$$v_j^{(i+1)} = v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)}$$

$$w_j^{(i+1)} = w_j^{(i)} + \delta w_j^{(i)}$$

$$s_j^{(i+1)} = s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)}$$

$$t_j^{(i+1)} = t_j^{(i)} + \delta t_j^{(i)}$$

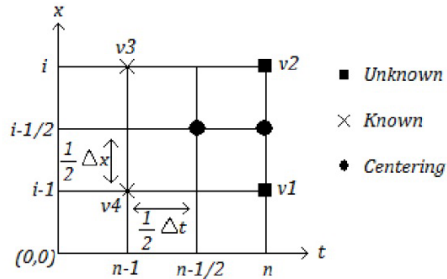
dengan  $(i)$  adalah iterasi dimana  $1 \leq i \leq np + 1$  dan  $np$  adalah partisi sumbu y. Dengan memisalkan variabel delta dan menghilangkan orde tinggi maka didapat persamaan yang linear.

4. Teknik Eliminasi Blok

Persamaan yang didapat sebelumnya dapat diselesaikan menggunakan matriks tridiagonal dengan elemen-elemennya

berupa matriks blok. Langkah-langkah dalam teknik eliminasi blok adalah sebagai berikut :

- Mencari elemen-elemen dari matriks tridiagonal
- Faktorisasi matriks trisiagonal dengan dekomposisi LU (*Lower Upper*).



Gambar 2.2 Stensil Skema Keller-Box

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir.

#### **3.1 Tahapan Penelitian**

Berikut ini adalah tahapan-tahapan dalam mengerjakan Tugas Akhir ini :

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dikaji beberapa referensi dari peneliti sebelumnya yang dapat menunjang pengerjaan tugas akhir ini.

2. Memodelkan aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar

Pada tahap ini digunakan persamaan pembangun untuk membentuk model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar. Adapun persamaan pembangun yang digunakan yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi.

3. Mentransformasi persamaan pembangun dimensional ke bentuk non-dimensional

Pada tahap ini persamaan pembangun akan ditransformasikan dari bentuk dimensional ke bentuk non-dimensional menggunakan variable non-dimensional.

4. Mengubah persamaan pembangun non-dimensional ke persamaan similaritas

Pada tahap ini persamaan pembangun non-dimensional diubah ke persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir (*stream function*).

5. Penyelesaian numerik

Pada tahap ini akan dilakukan penyelesaian numerik model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar menggunakan skema metode beda hingga Keller-Box.

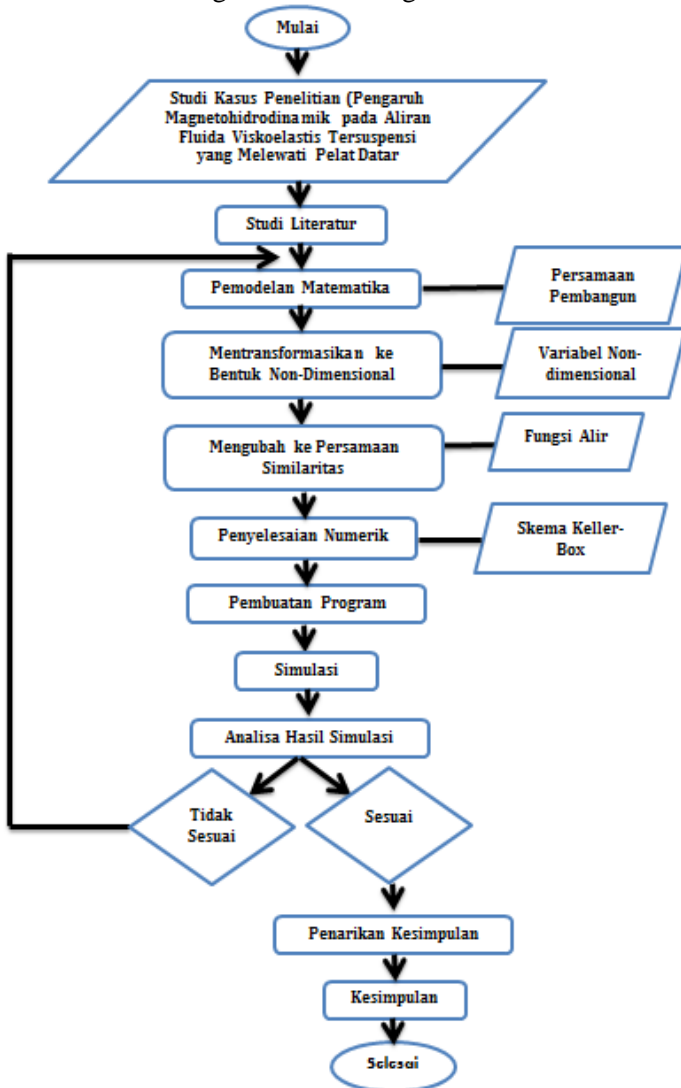


Langkah awal penyelesaian numerik adalah mengubah persamaan pembangun menjadi orde 1, kemudian dilakukan diskritisasi, selanjutnya dilakukan linearisasi menggunakan metode Newton, kemudian dilakukan penyelesaian dengan teknik eliminasi blok.

6. Pembuatan program  
Pada tahap ini akan dibuat program dari penyelesaian numerik metode beda hingga Keller-Box .
7. Simulasi  
Pada tahap ini akan dilakukan simulasi dengan menggunakan beberapa nilai pada parameter-parameter yang berhubungan dengan temperatur dan kecepatan pada aliran fluida viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar dengan menggunakan MATLAB.
8. Analisis hasil dan pembahasan  
Pada tahap ini akan dianalisis hasil simulasi pengaruh parameter-parameter yang berhubungan dengan temperatur dan kecepatan pada aliran fluida viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar.
9. Penarikan kesimpulan  
Pada tahap ini akan ditarik kesimpulan dari hasil analisis yang telah dilakukan dari tahap sebelumnya.
10. Penyusunan laporan tugas akhir  
Pada tahap ini hasil dari penelitian akan disusun ke dalam laporan tugas akhir.

### 3.2 Diagram Alir Metode Penelitian

Berikut adalah diagram alir dari tugas akhir ini :



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

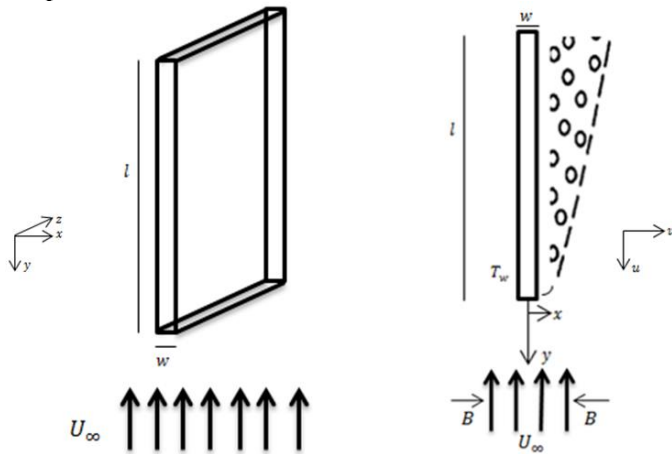
*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas persamaan pembangun aliran fluida magnetohidrodinamik pada aliran fluida viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar yang terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi yang kemudian diselesaikan dan dianalisis hasil simulasinya.

### 4.1 Persamaan Pembangun Dimepnsional

Aliran fluida viskoelastis tersuspensi dengan efek magnetohidrodinamik mengalir dari bawah ke atas yang kemudian melewati pelat datar. Daerah penelitian yang diamati adalah pada titik stagnasi atau  $x \approx 0$ . Berikut adalah ilustrasi dari aliran fluida viskoelastis tersuspensi dengan efek magnetohidrodinamik yang melewati pelat datar.



Gambar 4.1 Sketsa Aliran Fluida Viskoelastis Tersuspensi dengan Efek Magnetohidrodinamik yang Melewati Pelat Datar

Persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi. Berikut uraian persamaan aliran fluida viskoelastis dalam kondisi *steady*[7] :

## 1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.1)$$

## 2. Persamaan Momentum

pada sumbu  $\bar{x}$ 

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) \quad (4.2)$$

pada sumbu  $\bar{y}$  :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) \quad (4.3)$$

## 3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.4)$$

Karena pada penelitian ini fluida viskoelastis dipengaruhi oleh medan magnet, maka Persamaan (4.1)-(4.4) menjadi (lampiran 1) :

## 1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.5)$$

## 2. Persamaan Momentum

pada sumbu  $\bar{x}$  :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \right. \\ & \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) \\ & - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

pada sumbu  $\bar{y}$  :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} \right) - \right. \\ & \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) \\ & - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

### 3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.8)$$

Pada penelitian ini juga terdapat partikel suspensi didalam fluida viskoelastis, sehingga dengan mengacu GUPTA[2] maka persamaan menjadi :

#### 1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.9)$$

#### 2. Persamaan Momentum

pada sumbu  $\bar{x}$  :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \right. \\ & \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) \\ & - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2 + K_1 N H \end{aligned} \quad (4.10)$$

pada sumbu  $\bar{y}$  :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \right. \\ & \left. \bar{v} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + \\ & g\beta(T - T_\infty) - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2 + K_1 N H \end{aligned} \quad (4.11)$$

#### 3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.12)$$

Persamaan momentum pada arah  $y$  diabaikan karena tidak terdapat gaya gravitasi (*body forces*) dan kecepatan  $v \ll u$ , sehingga  $\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial y} \approx 0$ . Oleh karena itu dalam penelitian kali ini yang akan digunakan adalah kecepatan pada arah sumbu  $x$ [6], sehingga didapat persamaan pembangun dimensional sebagai berikut :

#### 1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.13)$$

## 2. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \right. \\ & \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) \\ & - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2 + K_1 N H \end{aligned} \quad (4.14)$$

## 3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.15)$$

dengan kondisi batas [6]:

$$\begin{aligned} \bar{u} = U_w = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{T} = T_w \quad & \text{pada } y = 0 \\ \bar{u} = U_\infty, \quad \bar{T} = T_\infty \quad & \text{pada } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dan

$\alpha$  : difusi termal

$K_1$  : koefisien hambat stoke

$N$  : number densitas partikel suspensi

$H$  : kecepatan partikel suspensi dikurangi kecepatan fluida

$K_1 = 6 \text{ kgs}^{-1}$

$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$

## 4.2 Persamaan Pembangun Non-Dimensional

Persamaan pembangun dimensional yang terdiri dari persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi selanjutnya ditransformasikan ke bentuk non-dimensional dengan menggunakan variable non-dimensional dan parameter non-dimensional sebagai berikut [13] :

Variabel non-dimensional :

$$\begin{aligned} x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad y = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{y}}{l} \right), \quad u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, \\ v = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{v}}{U_\infty} \right), \quad \theta = \frac{(\bar{T} - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)}, \quad Re = \frac{U_\infty l}{\nu} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Parameter non-dimensional [13] :

$$\begin{aligned} K &= \frac{k_0 U_\infty}{l \rho v} & \lambda &= \frac{g \beta (T_w - T_\infty) l^3 Re^2}{v^2}, \\ P_r &= \frac{v}{\alpha} & M &= \frac{\sigma B_0^2}{\rho} U_\infty \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.16) dan (4.17) ke Persamaan (4.13) – (4.15), sehingga didapat (lampiran 2) :

1. Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.18)$$

2. Persamaan Momentum :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \lambda \theta - Mu + K_1 NH \end{aligned} \quad (4.19)$$

3. Persamaan Energi :

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.20)$$

### 4.3 Persamaan Similaritas

Untuk menyelesaikan Persamaan (4.18) – (4.20), terlebih dahulu harus diubah ke dalam persamaan similaritas menggunakan fungsi alir sebagai berikut [7]:

$$\psi = U_\infty x v (2)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad \eta = \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} y$$

dengan

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dengan mensubstitusikan fungsi alir kedalam Persamaan (4.18) – (4.20), didapatkan persamaan similaritas sebagai berikut (lampiran 3) :

1. Persamaan Kontinuitas :

$$-\frac{U_\infty}{2x} \cdot f'' \cdot \eta + \frac{U_\infty}{2x} \cdot f'' \cdot \eta = 0 \quad (4.21)$$

2. Persamaan Momentum :

$$\begin{aligned} f''' + f f'' + K[2f' f''' - f f'''' - (f'')^2] + \lambda \theta - \\ M f' + K_1 NH = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$



## 3. Persamaan Energi :

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' = 0 \quad (4.23)$$

dimana ' adalah turunan terhadap  $y$ ,  
dan dengan kondisi batas sebagai berikut :

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad \theta = 1, \quad & \text{pada } y = 0 \\ u = U_{\infty}, \quad \theta = 0, \quad & \text{pada } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

**4.3 Penyelesaian Numerik**

Pada sub bab ini dibahas mengenai penyelesaian numerik dari Persamaan (4.22) dan (4.23) menggunakan metode Keller-Box. Penyelesaian ini diawali dengan cara mendiskritisasi model aliran magnetohidrodinamik pada fluida viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar yang telah didapatkan sebelumnya, kemudian dilakukan linierisasi metode Newton, yang selanjutnya diselesaikan dengan teknik eliminasi matrik blok tridiagonal dan disimulasikan dengan program.

**4.3.1 Transformasi Menjadi Persamaan Orde Pertama**

Langkah awal yang dilakukan adalah dengan mengubah Persamaan (4.22) dan (4.23) ke orde 1 dengan melakukan pemisalan fungsi sebagai berikut :

$$f' = u \quad (4.24)$$

$$u' = v \quad (4.25)$$

$$v' = w \quad (4.26)$$

$$\theta = s \quad (4.27)$$

$$s' = t \quad (4.28)$$

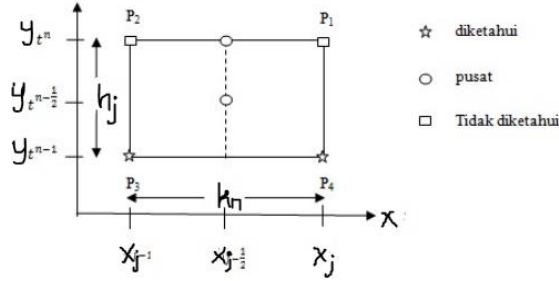
Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} 1. \quad w + f v + K(2uw - f w' - (v)^2) + \lambda s - Mu + \\ K_1 N H = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$2. \quad \frac{1}{Pr} t' + f t = 0 \quad (4.30)$$

### 4.3.2 Diskritisasi Model 4.3.2

Diskritisasi model dilakukan pada Persamaan (4.24)- (4.30) dengan menggunakan metode beda hingga pusat, terhadap sumbu  $x$  dan  $y$ . Karena penelitian dilakukan pada titik stagnasi ( $x \approx 0$ ), maka diskritisasi dilakukan hanya terhadap sumbu  $y$ . Sehingga didapatkan :



Gambar 4.2 Stensil Beda Hingga

$$\frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{h_j} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) = u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.31)$$

$$\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h_j} = \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n) = v_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.32)$$

$$\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h_j} = \frac{1}{2}(w_j^n + w_{j-1}^n) = w_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.33)$$

$$\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{h_j} = \frac{1}{2}(t_j^n + t_{j-1}^n) = t_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.34)$$

$$w_{j-\frac{1}{2}}^n + (fv)_{j-\frac{1}{2}}^n + K \left( 2(uw)_{j-\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{w - w_{j-1}^n}{h_j} \right) - \left( v_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 \right) + \lambda s_{j-\frac{1}{2}}^n - M u_{j-\frac{1}{2}}^n + K_1 N H = -(L_1)^{n-1} \quad (4.35)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{t_j^n - t_{j-1}^n}{h_j} \right) + (ft)_{j-\frac{1}{2}}^n = -(L_2)^{n-1} \quad (4.36)$$

dengan

$$\begin{aligned}(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= K_1 NH \\ (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= 0\end{aligned}\tag{4.37}$$

Persamaan (4.31)-(436) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}f_j - f_{j-1} - \frac{h_j}{2}(u_j + u_{j-1}) &= 0 \\ u_j - u_{j-1} - \frac{h_j}{2}(v_j + v_{j-1}) &= 0 \\ v_j - v_{j-1} - \frac{h_j}{2}(w_j + w_{j-1}) &= 0 \\ s_j - s_{j-1} - \frac{h_j}{2}(t_j + t_{j-1}) &= 0\end{aligned}\tag{4.38}$$

Untuk persamaan momentum dan energi :

$$\begin{aligned}&h_j \frac{1}{2}(w_j + w_{j-1}) + h_j \frac{1}{4}(f_j + f_{j-1})(v_j + v_{j-1}) + \\&\frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}h_j(f_j + f_{j-1})(w_j^n - w_{j-1}^n) + \frac{2}{4}h_j(u_j + \right. \\&\left. u_{j-1})(w_j + w_{j-1}) - \frac{1}{4}h_j(v_j + v_{j-1})^2\right) + \\&h_j \lambda(s_j + s_{j-1}) - h_j M(u_j + u_{j-1}) + h_j K_1 NH = \\&(R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\end{aligned}\tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Pr}(\tau_j - \tau_{j-1}) + \frac{1}{4}h_j(f_j + f_{j-1})(t_j + t_{j-1}) = \\&(R_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\end{aligned}\tag{4.40}$$

dengan

$$(R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = -h_j K_1 NH\tag{4.41}$$

$$(R_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = 0\tag{4.42}$$

### 4.3.3 Linearisasi Model

Pada tahap ini akan dilakukan linearisasi model, dengan dikenalkan bentuk iterasi metode Newton sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\
v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \\
w_j^{(i+1)} &= w_j^{(i)} + \delta w_j^{(i)} \\
s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\
t_j^{(i+1)} &= t_j^{(i)} + \delta t_j^{(i)}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan bentuk iterasi (4.43) ke Persamaan (4.38)-(4.40), maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
&\left(f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)}\right) - \left(f_{j-1}^{(i)} + \delta f_{j-1}^{(i)}\right) - \frac{h_j}{2} \left(u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} + \right. \\
&\left. u_{j-1}^{(i)} + \delta u_{j-1}^{(i)}\right) = 0 \\
&\left(u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)}\right) - \left(u_{j-1}^{(i)} + \delta u_{j-1}^{(i)}\right) - \frac{h_j}{2} \left(v_j^{(i)} + \right. \\
&\left. \delta v_j^{(i)} + v_{j-1}^{(i)} + \delta v_{j-1}^{(i)}\right) = 0 \\
&\left(v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)}\right) - \left(v_{j-1}^{(i)} + \delta v_{j-1}^{(i)}\right) - \frac{h_j}{2} \left(w_j^{(i)} + \right. \\
&\left. \delta w_j^{(i)} + w_{j-1}^{(i)} + \delta w_{j-1}^{(i)}\right) = 0 \\
&\left(s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)}\right) - \left(s_{j-1}^{(i)} + \delta s_{j-1}^{(i)}\right) - \frac{h_j}{2} \left(t_j^{(i)} + \delta t_j^{(i)} + \right. \\
&\left. t_{j-1}^{(i)} + \delta t_{j-1}^{(i)}\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
&h_j \frac{1}{2} \left(w_j^{(i)} + \delta w_j^{(i)} + w_{j-1}^{(i)} + \delta w_{j-1}^{(i)}\right) + \\
&h_j \frac{1}{4} \left(f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} + f_{j-1}^{(i)} + \delta f_{j-1}^{(i)}\right) \left(v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} + \right. \\
&\left. v_{j-1}^{(i)} + \delta v_{j-1}^{(i)}\right) + \frac{K}{2} \left(\frac{1}{2} \left(f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} + f_{j-1}^{(i)} + \right. \right. \\
&\left. \left. \delta f_{j-1}^{(i)}\right) \left(\left(w_j^{(i)} + \delta w_j^{(i)}\right) - \left(w_{j-1}^{(i)} + \delta w_{j-1}^{(i)}\right)\right) + \\
&\frac{2}{4} h_j \left(u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} + u_{j-1}^{(i)} + \delta u_{j-1}^{(i)}\right) \left(w_j^{(i)} + \delta w_j^{(i)} + \right. \\
&\left. w_{j-1}^{(i)} + \delta w_{j-1}^{(i)}\right) - \frac{1}{4} h_j \left(v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} + v_{j-1}^{(i)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta v_{j-1}^{(i)})^2) + h_j \lambda (s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} + s_{j-1}^{(i)} + \delta s_{j-1}^{(i)}) - \\ & h_j M (u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} + u_{j-1}^{(i)} + \delta u_{j-1}^{(i)}) + h_j K_1 N H = \\ & (R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{pr} \left( (t_j^{(i)} + \delta t_j^{(i)}) - (t_{j-1}^{(i)} + \delta t_{j-1}^{(i)}) \right) + \\ & \frac{1}{4} h_j (f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} + f_{j-1}^{(i)} + \delta f_{j-1}^{(i)}) (t_j^{(i)} + \delta t_j^{(i)} + \\ & t_{j-1}^{(i)} + \delta t_{j-1}^{(i)}) = (R_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Selanjutnya dengan menghilangkan orde tinggi didapatkan :

$$\begin{aligned} & (\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_{j-\frac{1}{2}} \\ & (\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_2)_{j-\frac{1}{2}} \\ & (\delta v_j - \delta v_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta w_j + \delta w_{j-1}) = (r_3)_{j-\frac{1}{2}} \\ & (\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{h_j}{2} (\delta t_j + \delta t_{j-1}) = (r_4)_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

dan dari Persamaan (4.45)- (4.46) didapatkan :

$$\begin{aligned} & (a_1)_j \delta w_j + (a_2)_j \delta w_{j-1} + (a_3)_j \delta v_j + \\ & (a_4)_j \delta v_{j-1} + (a_5)_j \delta f_j + (a_6)_j \delta f_{j-1} + (a_7)_j \delta u_j + \\ & (a_8)_j \delta u_{j-1} + (a_9)_j \delta s_j + (a_{10})_j \delta s_{j-1} = (r_5)_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_j \delta t_j^n + (b_2)_j \delta t_{j-1}^n + (b_3)_j \delta f_j^n + (b_4)_j \delta f_{j-1}^n + \\ & (r_6)_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.49)$$

dengan

$$\begin{aligned} & (a_1)_j = h_j \frac{K}{2} u_{j-\frac{1}{2}} - K f_{j-\frac{1}{2}} \\ & (a_2)_j = (a_1)_j + 2K f_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(a_3)_j = \frac{h_j}{2} \left( f_{j-\frac{1}{2}} - K \mathfrak{v}_{j-\frac{1}{2}} \right)$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = \frac{h_j}{2} \mathfrak{v}_{j-\frac{1}{2}} - \frac{K}{2} (\mathfrak{w}_j - \mathfrak{w}_{j-1})$$

$$(a_6)_j = (a_5)_j$$

$$(a_7)_j = -h_j \left( \frac{M}{2} - \frac{K}{2} \mathfrak{w}_{j-\frac{1}{2}} \right)$$

$$(a_8)_j = (a_7)_j$$

$$(a_9)_j = \frac{h_j}{2}$$

$$(a_{10})_j = (a_9)_j$$

$$(b_1)_j = \frac{1}{Pr} + \frac{h_j}{2} f_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(b_2)_j = (b_1)_j - \frac{2}{Pr}$$

$$(b_3)_j = \frac{h_j}{2} \mathfrak{t}_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(b_4)_j = (b_3)_j$$

$$(r_1)_{j-\frac{1}{2}} = f_{j-1} - f_j + h_j u_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(r_2)_{j-\frac{1}{2}} = u_{j-1} - u_j + h_j \mathfrak{v}_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(r_3)_{j-\frac{1}{2}} = \mathfrak{v}_{j-1} - \mathfrak{v}_j + h_j \mathfrak{w}_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(r_4)_{j-\frac{1}{2}} = s_{j-1} - s_j + h_j t_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(r_5)_{j-\frac{1}{2}} = -h_j \mathfrak{w}_{j-\frac{1}{2}} - h_j (f \mathfrak{v})_{j-\frac{1}{2}} + h_j M u_{j-\frac{1}{2}} - K \left( 2h_j (u \mathfrak{w})_{j-\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. f_{j-\frac{1}{2}}^n (\mathfrak{w}_j - \mathfrak{w}_{j-1}) \pm h_j \left( \mathfrak{v}_{j-\frac{1}{2}} \right)^2 \right) - \lambda h_j s_{j-\frac{1}{2}} +$$

$$M h_j u_{j-\frac{1}{2}} - 2K_1 N H + (R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(r_6)_{j-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{Pr} (\mathfrak{t}_j - \mathfrak{t}_{j-1}) - h_j (f \mathfrak{t})_{j-\frac{1}{2}} + (R_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

#### 4.3.4 Teknik Eliminasi Blok

Sistem linier pada Persamaan (4.47)-(4.49) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok. Pada metode Keller-Box ini elemen-elemen dari blok tridiagonal berupa matriks blok, oleh karena itu terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok tridiagonal dari sistem linier Persamaan (4.47)-(4.49) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat  $j = 1, j = J - 1$ , dan  $j = J$ . Tiga keadaan tersebut sudah mewakili semua keadaan dimana  $j = 1$  sebagai keadaan awal,  $j = J$  mewakili keadaan akhir dan  $j = J - 1$  dapat digunakan disemua keadaan ( $2 \leq j \leq J - 1$ ).

Ketika  $j = 1$ , maka Persamaan (4.47)-(4.49) menjadi

$$\begin{aligned} (\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{h_1}{2}(\delta u_1 + \delta u_0) &= (r_1)_{1-\frac{1}{2}} \\ (\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{h_1}{2}(\delta v_1 + \delta v_0) &= (r_2)_{1-\frac{1}{2}} \\ (\delta v_1 - \delta v_0) - \frac{h_1}{2}(\delta w_1 + \delta w_0) &= (r_3)_{1-\frac{1}{2}} \\ (\delta s_1 - \delta s_0) - \frac{h_1}{2}(\delta t_1 + \delta t_0) &= (r_4)_{1-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1)_1 \delta w_1 + (a_2)_1 \delta w_0 + (a_3)_1 \delta v_1 + (a_4)_1 \delta v_0 + \\ (a_5)_1 \delta f_1 + (a_6)_1 \delta f_0 + (a_7)_1 \delta u_1 + (a_8)_1 \delta u_0 + (a_9)_1 \delta s_1 + \\ (a_{10})_1 \delta s_0 &= (r_5)_{1-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(b_1)_1 \delta t_1 + (b_2)_1 \delta t_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 = (r_6)_{1-\frac{1}{2}}$$

Dengan memisalkan  $-\frac{h_1}{2} = d_1$  dan berdasarkan kondisi batas  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0$  maka sistem diatas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & d_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_1 \\ (a_4)_1 & (a_2)_1 & 0 & (a_5)_1 & (a_1)_1 & 0 \\ 0 & 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathcal{V}_0 \\ \delta \mathcal{W}_0 \\ \delta \mathcal{T}_0 \\ \delta f_1 \\ \delta \mathcal{W}_1 \\ \delta \mathcal{T}_1 \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_7)_1 & (a_3)_1 & (a_9)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta \mathcal{V}_1 \\ \delta s_1 \\ \delta f_2 \\ \delta \mathcal{W}_2 \\ \delta \mathcal{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_{1-(1/2)} \\ (r_2)_{1-(1/2)} \\ (r_3)_{1-(1/2)} \\ (r_4)_{1-(1/2)} \\ (r_5)_{1-(1/2)} \\ (r_6)_{1-(1/2)} \end{bmatrix}$$

Untuk lebih jelasnya pada keadaan pertama, dapat ditulis  $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$

Ketika  $j = J - 1$ , maka Persamaan (4.47)-(4.49) menjadi

$$\begin{aligned}
(\delta f_{J-1} - \delta f_{J-2}) - \frac{h_{J-1}}{2}(\delta u_{J-1} + \delta u_{J-2}) &= (r_1)_{(J-1)-(1/2)} \\
(\delta u_{J-1} - \delta u_{J-2}) - \frac{h_{J-1}}{2}(\delta \mathcal{V}_{J-1} + \delta \mathcal{V}_{J-2}) &= (r_2)_{(J-1)-(1/2)} \\
(\delta \mathcal{V}_{J-1} - \delta \mathcal{V}_{J-2}) - \frac{h_{J-1}}{2}(\delta \mathcal{W}_{J-1} + \delta \mathcal{W}_{J-2}) &= (r_3)_{(J-1)-(1/2)} \\
(\delta s_{J-1} - \delta s_{J-2}) - \frac{h_{J-1}}{2}(\delta \mathcal{T}_{J-1} + \delta \mathcal{T}_{J-2}) &= (r_4)_{(J-1)-(1/2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_{J-1} \delta \mathcal{W}_{J-1} + (a_2)_{J-1} \delta \mathcal{W}_{J-2} + (a_3)_{J-1} \delta \mathcal{V}_{J-1} + \\
& (a_4)_{J-1} \delta \mathcal{V}_{J-2} + (a_5)_{J-1} \delta f_{J-1} + (a_6)_{J-1} \delta f_{J-2} + \\
& (a_7)_{J-1} \delta u_{J-1} + (a_8)_{J-1} \delta u_{J-2} + (a_9)_{J-1} \delta s_{J-1} + \\
& (a_{10})_{J-1} \delta s_{J-2} = (r_5)_{(J-1)-(1/2)} \\
& (b_1)_{J-1} \delta \mathcal{T}_{J-1}^n + (b_2)_{J-1} \delta \mathcal{T}_{J-2}^n + (b_3)_{J-1} \delta f_{J-1}^n + (b_4)_{J-1} \delta f_{J-2}^n = \\
& (r_6)_{(J-1)-(1/2)}
\end{aligned}$$

Dengan memisalkan  $-\frac{h_{J-1}}{2} = d_{J-1}$  maka sistem diatas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut :



$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & (a_6)_{j-1} & (a_2)_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_4)_{j-1} & 0 & (b_2)_{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{j-3} \\ \delta v_{j-3} \\ \delta s_{j-3} \\ \delta f_{j-2} \\ \delta w_{j-2} \\ \delta t_{j-2} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} d_{j-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & d_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d_{j-1} \\ (a_8)_{j-1} & (a_4)_{j-1} & (a_{10})_{j-1} & (a_5)_{j-1} & (a_1)_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_3)_{j-1} & 0 & (b_1)_{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{j-2} \\ \delta v_{j-2} \\ \delta s_{j-2} \\ \delta f_{j-1} \\ \delta w_{j-1} \\ \delta t_{j-1} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} d_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_7)_{j-1} & (a_3)_{j-1} & (a_9)_{j-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{j-1} \\ \delta v_{j-1} \\ \delta s_{j-1} \\ \delta f_j \\ \delta w_j \\ \delta t_j \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} (r_1)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_2)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_3)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_4)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_5)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_6)_{(j-1)-(1/2)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Untuk lebih jelasnya pada saat  $j = J - 1$ , persamaan dapat ditulis

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

Ketika  $j = J$ , maka Persamaan (4.47)-(4.49) menjadi

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{h_j}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{h_j}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_2)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
(\delta \mathbf{v}_J - \delta \mathbf{v}_{J-1}) - \frac{h_J}{2}(\delta \mathbf{w}_J + \delta \mathbf{w}_{J-1}) &= (r_3)_{J-\frac{1}{2}} \\
(\delta s_J - \delta s_{J-1}) - \frac{h_J}{2}(\delta \mathbf{t}_J + \delta \mathbf{t}_{J-1}) &= (r_4)_{J-\frac{1}{2}} \\
(a_1)_J \delta \mathbf{w}_J + (a_2)_J \delta \mathbf{w}_{J-1} + (a_3)_J \delta \mathbf{v}_J + (a_4)_J \delta \mathbf{v}_{J-1} + \\
(a_5)_J \delta f_J + (a_6)_J \delta f_{J-1} + (a_7)_J \delta u_J + (a_8)_J \delta u_{J-1} + \\
(a_9)_J \delta s_J + (a_{10})_J \delta s_{J-1} &= (r_5)_{J-\frac{1}{2}} \\
(b_1)_J \delta \mathbf{t}_J + (b_2)_J \delta \mathbf{t}_{J-1} + (b_3)_J \delta f_J + (b_4)_J \delta f_{J-1} &= (r_6)_{J-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Dengan memisalkan  $-\frac{h_J}{2} = d_J$ , maka sistem diatas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_J \\ 0 & 0 & 0 & (a_6)_J & (a_2)_J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_4)_J & 0 & (b_2)_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{J-2} \\ \delta \mathbf{v}_{J-2} \\ \delta s_{J-2} \\ \delta f_{J-1} \\ \delta \mathbf{w}_{J-1} \\ \delta \mathbf{t}_{J-1} \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} d_J & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & d_J & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_J & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d_J \\ (a_8)_J & (a_4)_J & (a_{10})_J & (a_5)_J & (a_1)_J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_3)_J & 0 & (b_1)_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{J-1} \\ \delta \mathbf{v}_{J-1} \\ \delta s_{J-1} \\ \delta f_J \\ \delta \mathbf{w}_J \\ \delta \mathbf{t}_J \end{bmatrix} = \\
\begin{bmatrix} (r_1)_{J-(1/2)} \\ (r_2)_{J-(1/2)} \\ (r_3)_{J-(1/2)} \\ (r_4)_{J-(1/2)} \\ (r_5)_{J-(1/2)} \\ (r_6)_{1-(1/2)} \end{bmatrix}$$

Sehingga, untuk semua nilai  $j = J$ , kita memiliki  $[B_J][\delta_{J-1}] + [A_J][\delta_J] = [r_j]$

Adapun untuk semua  $j = 1, 2, 3, \dots, J-1, J$  dapat kita sederhanakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
 j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\
 j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\
 j = 3 & : [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3] \\
 & \vdots \\
 j = J-1 & : [B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j] \\
 j = J & : [B_J][\delta_{J-1}] + [A_J][\delta_J] = [r_J]
 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{A}\delta = \mathbf{r} \quad (4.50)$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [A_1] & [C_1] & & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & [B_{J-1}] & [A_{J-1}] & [C_{J-1}] \\ & & & & & [B_J] & [A_J] \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{J-1}] \\ [\delta_J] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{J-1}] \\ [r_J] \end{bmatrix}$$

dengan elemen matriks sebagai berikut:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & d_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_1 \\ (a_4)_1 & (a_2)_1 & 0 & (a_5)_1 & (a_1)_1 & 0 \\ 0 & 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix},$$

$$[A_j] = \begin{bmatrix} d_j & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & d_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_j & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d_j \\ (a_8)_j & (a_4)_j & (a_{10})_j & (a_5)_j & (a_1)_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_3)_j & 0 & (b_1)_j \end{bmatrix}$$

$$[B_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & 0 & 0 & (a_6)_j & (a_2)_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_4)_j & 0 & (b_2)_j \end{bmatrix}$$

$$[C_j] = \begin{bmatrix} d_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_7)_j & (a_3)_j & (a_9)_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$1 \leq j \leq J-1$$

$$[\delta_1] = \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta w_0 \\ \delta t_0 \\ \delta f_1 \\ \delta w_1 \\ \delta t_1 \end{bmatrix}, [\delta_j] = \begin{bmatrix} \delta u_{j-1} \\ \delta v_{j-1} \\ \delta s_{j-1} \\ \delta f_j \\ \delta w_j \\ \delta t_j \end{bmatrix}, [r_j] = \begin{bmatrix} (r_1)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_2)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_3)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_4)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_5)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_6)_{j-\frac{1}{2}}^n \end{bmatrix}, 2 \leq j \leq J$$

Pada Persamaan (4.50) terlihat jelas bahwa matriks A merupakan matriks tridiagonal yang seluruh elemennya bernilai nol kecuali pada 3 diagonal utamanya. Sehingga Persamaan matriks

(4.50) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok dengan asumsi matriks  $A$  adalah matriks *non-singular* dan dapat difaktorkan menjadi

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (4.51)$$

dengan

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\alpha_2] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [\alpha_{j-1}] & \\ & & & [B_j] & [\alpha_j] \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [I] & [\Gamma_{j-1}] \\ & & & & [I] \end{bmatrix}$$

$[I]$  merupakan matriks identitas dengan ukuran  $6 \times 6$  dan  $[\Gamma_1]$  merupakan matriks berukuran  $6 \times 6$  dengan elemen yang ditentukan oleh persamaan berikut:

$$[\alpha_1] = [A_1] \quad (4.52)$$

$$[\alpha_1][\Gamma_1] = [C_1] \quad (4.53)$$

$$[\alpha_j] = [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, j \quad (4.54)$$

$$[\alpha_j][\Gamma_j] = [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, j-1 \quad (4.55)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (4.51) ke Persamaan (4.52) maka diperoleh

$$\mathbf{LU}\delta = \mathbf{r} \quad (4.56)$$

dengan mendefinisikan bahwa

$$\mathbf{U}\delta = \mathbf{W} \quad (4.57)$$

maka persamaan (4.51) menjadi

$$\mathbf{LW} = \mathbf{r} \quad (4.58)$$

dengan

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_1] \\ [\mathbf{W}_2] \\ \vdots \\ [\mathbf{W}_{J-1}] \\ [\mathbf{W}_J] \end{bmatrix}$$

dengan  $[\mathbf{W}_j]$  merupakan matriks berukuran  $6 \times 1$  yang elemennya yaitu:

$$[\alpha_1][\mathbf{W}_1] = [r_1]$$

$$[\alpha_j][\mathbf{W}_j] = [r_j] - [B_j][\mathbf{W}_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq J$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks  $\mathbf{W}$  yaitu  $\Gamma_j$ ,  $\alpha_j$  dan  $\mathbf{W}_j$  yang dicari menggunakan *forward sweep* dengan  $\mathbf{W}_1$  digunakan untuk mencari  $\mathbf{W}_2$  dan seterusnya hingga  $\mathbf{W}_J$ . Selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari  $\delta$  dengan menggunakan *backward sweep*, dengan delta  $J$  diperoleh dari  $\mathbf{W}_J$ , dan  $\delta_j$  diperoleh dari  $\mathbf{W}_j$  dan seterusnya hingga  $\delta_1$  atau dapat ditulis:

$$[\delta_j] = [\mathbf{W}_j]$$

$$[\delta_j] = [\mathbf{W}_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq J - 1$$

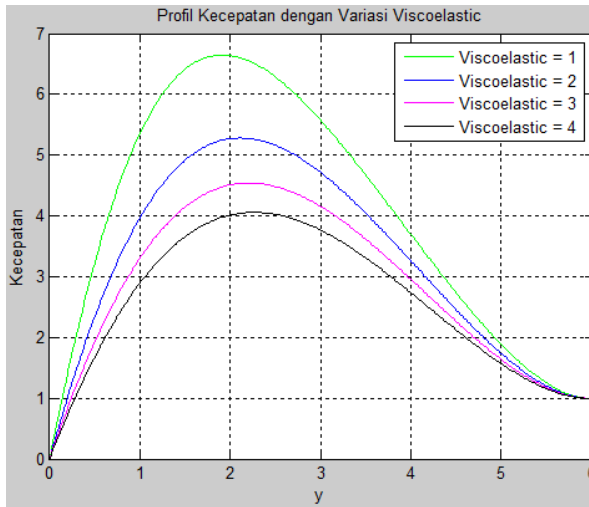
Dengan didapatkan nilai  $\delta$  maka Persamaan (4.47)-(4.49) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian dengan melakukan iterasi pada Persamaan (4.43) sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw, kriteria konvergen menggunakan  $v(0, t)$  dan iterasi berhenti saat didapatkan  $|\delta v(0, t)| < \varepsilon$ , dan pada penelitian ini digunakan  $\varepsilon = 10^{-5}$  yang memberikan nilai presisi sampai empat desimal.

#### 4.4 Hasil Simulasi

Pada sub bab ini akan dianalisis hasil simulasi dari model yang telah dikerjakan menggunakan *software* MATLAB (lampiran 4). Simulasi dilakukan dengan memvariasikan bilangan Prandtl ( $P_r$ ), parameter viskoelastik ( $K$ ), parameter magnetik ( $M$ ), dan variasi nilai densitas partikel suspensi ( $N$ ). Kemudian dianalisis pengaruh

dari masing-masing parameter terhadap profil kecepatan ( $f'$ ) dan profil temperatur ( $\theta$ ).

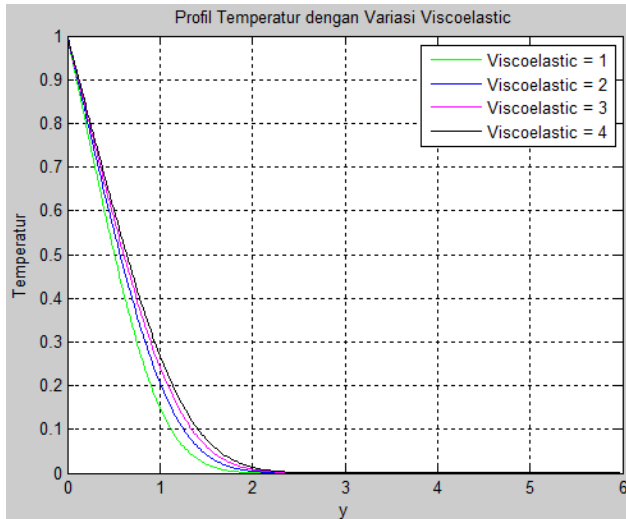
#### 4.4.1 Pengaruh Viskoelastik ( $K$ ) terhadap Profil Kecepatan ( $f'$ ) dan Temperatur ( $\theta$ )



Gambar 4.3 Variasi parameter viskoelastik ( $K$ ) pada profil kecepatan ( $f'$ )

Gambar 4.3 adalah nilai profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter viskoelastik ( $K$ )=1,2,3,4 dengan nilai  $Pr = 0.7$ ,  $M = 1$ ,  $N = 1$ ,  $\lambda = 1$ , dan  $H = 0.1$ . Dari gambar 4.3 dapat dilihat bahwa kecepatan fluida akan meningkat dengan menurunnya parameter viskoelastik ( $K$ ). Hal ini terjadi karena dengan menurunnya parameter viskoelastik ( $K$ ) maka akan menyebabkan kekentalan fluida menurun sehingga akan mengurangi gaya gesek dan menyebabkan kecepatan fluida meningkat. Sedangkan dari gambar 4.4 dapat dilihat bahwa temperatur akan mengalami penurunan seiring dengan menurunnya parameter viskoelastik ( $K$ ). Hal ini terjadi karena dengan menurunnya parameter viskoelastik ( $K$ )

maka kekentalan akan mengalami penurunan dan mengurangi gaya gesek sehingga menyebabkan temperatur juga menurun.

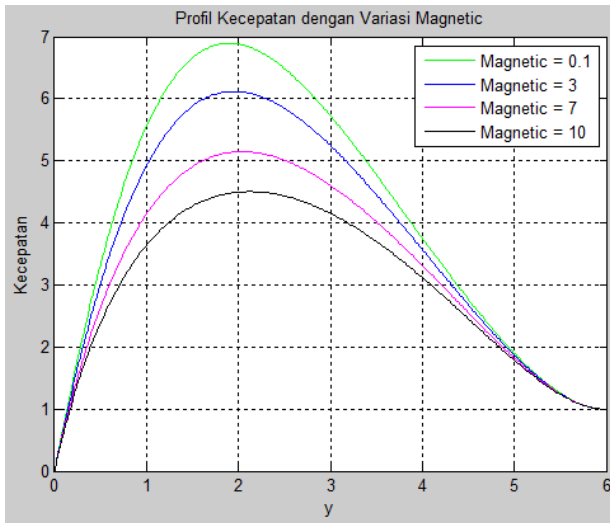


Gambar 4.4 Variasi parameter viskoelastik ( $K$ ) pada profil temperatur ( $\theta$ )

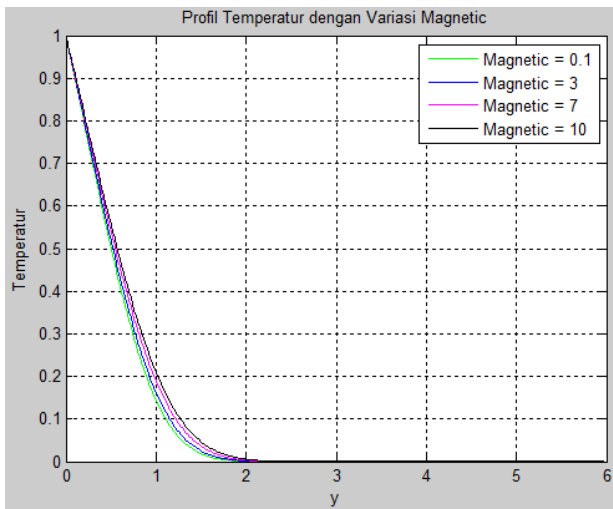
#### 4.4.2 Pengaruh Magnetik( $M$ ) terhadap Profil Kecepatan( $f'$ ) dan Temperatur ( $\theta$ )

Pada gambar 4.5 dan 4.6 dapat dilihat profil kecepatan ( $f'$ ) dan profil temperatur ( $\theta$ ) dengan variasi parameter magnetik ( $M$ )=0.1,3,7,10 dengan nilai  $Pr = 0.7$ ,  $K = 1$ ,  $N = 1$ ,  $\lambda = 1$ , dan  $H = 0.1$ . Dari gambar 4.5 dapat dilihat bahwa dengan meningkatnya parameter magnetik ( $M$ ) maka profil kecepatan ( $f'$ ) akan menurun dan profil temperatur ( $\theta$ ) akan meningkat. Hal ini terjadi karena dengan adanya medan magnet maka akan menimbulkan gaya Lorentz, dan dengan meningkatnya gaya Lorentz maka akan memperbesar gesekan dan menimbulkan kecepatan menurun dan temperatur mengalami peningkatan seperti pada gambar 4.6.





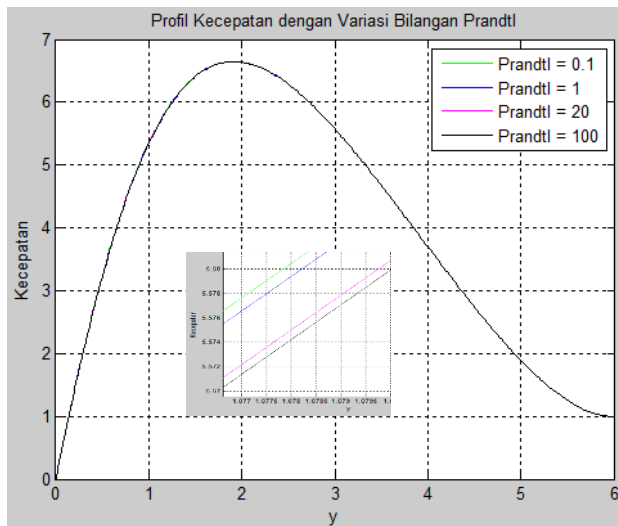
Gambar 4.5 Variasi Parameter Magnetik ( $M$ ) pada Profil Kecepatan( $f'$ )



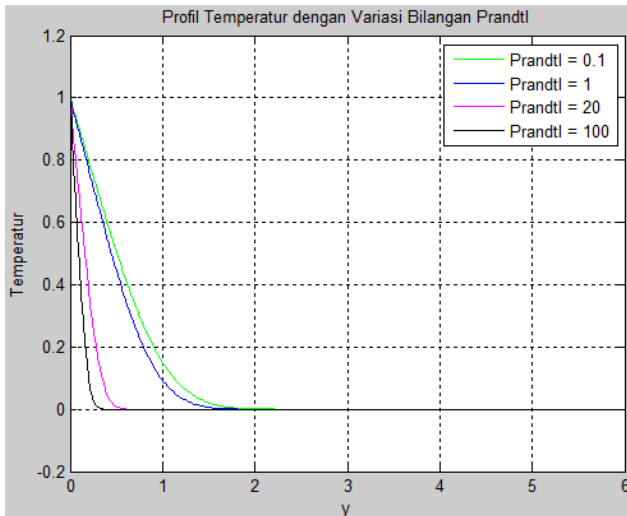
Gambar 4.6 Variasi Parameter Magnetik ( $M$ ) pada Profil Temperatur( $\theta$ )

#### 4.4.3 Pengaruh Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) terhadap Profil Kecepatan( $f'$ ) dan Temperatur( $\theta$ )

Selanjutnya dari gambar 4.7 dan 4.8 dapat dilihat profil kecepatan ( $f'$ ) dan profil temperatur ( $\theta$ ) dengan variasi bilangan Prandtl ( $Pr$ )=0.7,1,20,100 dengan nilai  $K = 1$ ,  $M = 1$ ,  $N = 1$ ,  $\lambda = 1$ , dan  $H = 0.1$ . Dari gambar 4.7 dapat dilihat bahwa kecepatan akan meningkat dengan menurunnya variasi bilangan Prandtl ( $Pr$ ). Hal ini sesuai dengan definisi bilangan Prandtl ( $Pr$ ). Sedangkan dari gambar 4.8 dapat dilihat bahwa temperatur ( $\theta$ ) akan meningkat dengan menurunnya variasi bilangan Prandtl ( $Pr$ ). Hal tersebut disebabkan bilangan Prandtl berbanding terbalik dengan difusi termal ( $Pr \sim \frac{1}{\alpha}$ ).



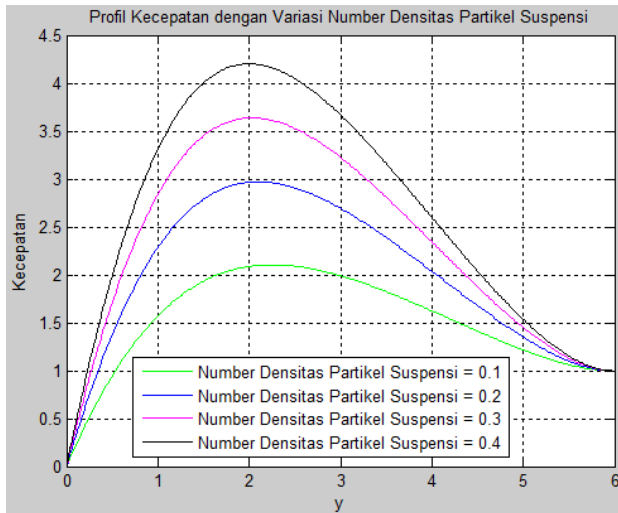
Gambar 4.7 Variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) pada Profil Kecepatan ( $f'$ )



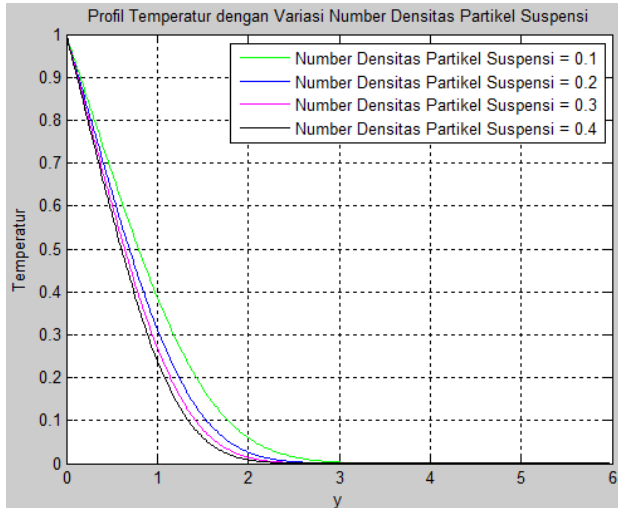
Gambar 4.8 Variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) pada Profil Temperatur ( $\theta$ )

#### 4.4.4 Pengaruh Nilai Densitas Partikel Suspensi ( $N$ ) terhadap Profil Kecepatan( $f'$ ) dan Temperatur( $\theta$ )

Dalam penelitian ini juga dilihat profil kecepatan ( $f'$ ) dan profil temperatur ( $\theta$ ) dengan variasi nilai densitas partikel suspensi ( $N$ )=0.1,0.2,0.3,0.4 dengan nilai  $Pr = 0.7$ ,  $K = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\lambda = 1$ , dan  $H = 0.1$ . Dari gambar 4.9 dan 4.10 dapat dilihat bahwa dengan meningkatnya nilai densitas partikel suspensi ( $N$ ) profil kecepatan ( $f'$ ) akan meningkat dan profil temperatur ( $\theta$ ) akan mengalami penurunan. Hal ini terjadi karena dengan meningkatnya nilai densitas partikel suspensi ( $N$ ) maka kerapatan fluida akan meningkat, dengan meningkatnya kerapatan, maka jumlah partikel akan semakin banyak sehingga gerakan yang dihasilkan oleh partikel semakin besar, hal ini menyebabkan kecepatan semakin meningkat dan temperatur menurun.



Gambar 4.9 Variasi Nilai Densitas Partikel Suspensi ( $N$ ) pada Profil Kecepatan ( $f'$ )



Gambar 4.10 Variasi Nilai Densitas Partikel Suspensi ( $N$ ) pada Profil Temperatur ( $\theta$ )

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LAMPIRAN 1

### PENAMBAHAN EFEK MAGNETIK KEDALAM PERSAMAAN PEMBANGUN

*Volume force* pada fluida menyebabkan beberapa gaya bekerja pada fluida, yaitu gaya grafitasi dan gaya magnet. Berdasarkan Ahmed (2012),  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$  didefinisikan dengan

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \rho \mathbf{g} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}\end{aligned}\quad (1)$$

dengan:

$\mathbf{g}$  : gaya grafitasi

$\mathbf{J}$  : arus listrik

$\mathbf{B}_0$  : vektor medan magnet

$\mathbf{b}$  : magnet terinduksi

$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$

Ketika bilangan Reynold kecil maka medan elektrik dan medan magnetik terinduksi diabaikan, sehingga Persamaan (1) menjadi:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \quad (2)$$

dengan :

$\sigma$  : konduktivitas listrik

$B_0$  : medan magnet

Substitusi Persamaan (2) ke dalam Persamaan (1) maka akan didapat gaya magnetik yang bekerja pada fluida

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} + \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 \quad (3)$$

dengan  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$

maka diperoleh  $(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) = (vB_0i, uB_0j, 0)$

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = (-uB_0^2i, -vB_0^2j, 0) \quad (4)$$

Dengan mensubstitusikan pers(4) ke pers(3) didapat

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} + \sigma(-uB_0^2i, -vB_0^2j, 0) \quad (5)$$

Grafitasi pada fluida nilainya sangat kecil sehingga bisa diabaikan, maka Persamaan (5) menjadi

$$\mathbf{F} = \sigma(-uB_0^2i, -vB_0^2j, 0) \quad (6)$$

Karena gaya yang bekerja pada fluida adalah pada arah sumbu  $x$  maka gaya magnet yang dipakai adalah pada arah sumbu  $x$  yaitu  $-uB_0^2 i$ .

Sehingga persamaan momentum pada sumbu  $x$  :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2$$

persamaan momentum pada sumbu  $y$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2$$

## LAMPIRAN 2

### TRANSFORMASI PERSAMAAN PEMBANGUN DIMENSIOANL KE PERSAMAAN NON-DIMENSIONAL

Dari pembahasan sebelumnya, didapatkan :

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

2. Persamaan Momentum

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2 + K_1 N H$$

3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$$

Selanjutnya substitusikan variable non-dimensional sebagai berikut :

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad y = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{y}}{l} \right), \quad u = \frac{\bar{u}}{U_\infty},$$

$$v = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{v}}{U_\infty} \right), \quad \theta = \frac{(\bar{T} - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)}, \quad Re = \frac{U_\infty l}{\nu}$$

Sehingga persamaan pembangun menjadi :

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\partial(u U_\infty)}{\partial(lx)} + \frac{\partial\left(\frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial\left(\frac{l y}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Re^{\frac{1}{2}}}{l} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{l} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Sehingga didapat persamaan kontinuitas non-dimensional sebagai berikut:



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2. Persamaan Momentum :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2 + K_1 NH$$

Perhitungan pada ruas kiri:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= (u U_\infty) \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial(lx)} + \left( \frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial\left(\frac{ly}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} \\ &= \frac{U_\infty^2}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{Re^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{l}{Re^{\frac{1}{2}}}} v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{U_\infty^2}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{l} v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{U_\infty^2}{l} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + \\ &\quad g\beta(T - T_\infty) - \frac{1}{\rho} \sigma \bar{u} B_0^2 + K_1 NH \\ &= \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{k_0}{\rho} \left[ (u U_\infty) \frac{\partial^3(u U_\infty)}{\partial(lx) \partial\left(\frac{ly}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} + \left( \frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial^3(u U_\infty)}{\partial\left(\frac{ly}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)^3} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial\left(\frac{ly}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} \frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial(lx) \partial\left(\frac{ly}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} + \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial(lx)} \frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial\left(\frac{ly}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)^2} \right] + g\beta(T_w - T_\infty)\theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho} \sigma(u U_\infty) B_0^2 + K_1 NH \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0}{\rho} \frac{U_\infty Re}{l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\
&\quad \frac{k_0}{\rho} \left[ \left( \frac{U_\infty^2 Re}{l^3} \right) u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \left( \frac{U_\infty^2}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{Re^{\frac{1}{2}}}{l^3} \right) v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} - \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{U_\infty^2 \left( Re^{\frac{1}{2}} \right)^2}{l^3} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( \frac{U_\infty^2 Re}{l^3} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\beta(T_w - \\
&\quad T_\infty)\theta - \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_0^2 + K_1 NH \\
&= \frac{U_\infty Re}{l^2} \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{U_\infty Re}{l^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\beta(T_w - T_\infty)\theta - \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_0^2 + K_1 NH
\end{aligned}$$

Karena ruas kanan sama dengan ruas kiri, sehingga didapat persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{U_\infty^2}{l} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{U_\infty Re}{l^2} \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\left( \frac{U_\infty^2 Re}{l^3} \right) k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\beta(T_w - T_\infty)\theta - \\
&\quad \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_0^2 + K_1 NH
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{U_\infty Re}{l^2} \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{U_\infty^2 Re}{l^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \beta(T_w - T_\infty)\theta - \\
&\quad \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_0^2 + K_1 NH
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{Re}{U_\infty l} \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial y} - \frac{Re}{l^2} \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{l}{U_\infty} g\beta(T_w - T_\infty) - \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_0^2 + K_1 NH
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{U_\infty l}{U_\infty l} \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{U_\infty l}{l^2} \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{l}{U_\infty^2} g \beta (T_w - T_\infty) \theta - \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_0^2 + K_1 N H \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{U_\infty k_0}{l v \rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{l}{U_\infty^2} g \beta (T_w - T_\infty) \theta - \frac{U_\infty}{\rho} \sigma u B_0^2 + K_1 N H
\end{aligned}$$

Diberikan parameter non-dimensional sebagai berikut:

$$K = \frac{k_0 U_\infty}{l \rho v} \quad \lambda = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) l^3 Re^2}{v^2},$$

$$M = \frac{\sigma B_0^2}{\rho} U_\infty$$

Sehingga diperoleh persamaan momentum momentum non-dimensional sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \\
&\quad \lambda \theta - M u + K_1 N H
\end{aligned}$$

### 3. Persamaan Energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$$

Perhitungan pada ruas kiri:

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= (u U_\infty) \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial(lx)} + \left( v \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&\quad \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial\left(\frac{ly}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} \\
&= \frac{U_\infty}{l} u \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial x} + \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{l}{Re^{\frac{1}{2}}}} v \\
&\quad \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y} \\
&= \frac{U_\infty}{l} \left( u \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial x} + v \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan:

$$\begin{aligned}
 \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} &= \alpha \frac{\partial^2 ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial \left( \frac{ly}{Re\frac{1}{2}} \right)^2} \\
 &= \frac{\alpha}{\left( \frac{ly}{Re\frac{1}{2}} \right)^2} \frac{\partial^2 ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y^2} \\
 &= \frac{\alpha \left( Re\frac{1}{2} \right)^2}{(l)^2} \left( \frac{\partial^2 ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial x} &= \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta)}{\partial x} + \frac{\partial (T_\infty)}{\partial x} \\
 \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y} &= \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta)}{\partial y} + \frac{\partial T_\infty}{\partial y} \\
 \frac{\partial^2 ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta)}{\partial y} + \frac{\partial (T_\infty)}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

$T_\infty$  adalah konstan, jadi diturunkan terhadap  $x$  maupun  $y$  bernilai nol.

$$\begin{aligned}
 \frac{U_\infty}{l} (T_w - T_\infty) \left( u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \frac{\alpha \left( Re\frac{1}{2} \right)^2}{l^2} (T_w - T_\infty) \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{U_\infty}{l} \left( u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \frac{\alpha \left( Re\frac{1}{2} \right)^2}{l^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
 u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{l}{U_\infty} \frac{\alpha \left( Re\frac{1}{2} \right)^2}{l^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
 u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\alpha Re}{l U_\infty} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan  $Re = \left( \frac{U_\infty l}{\nu} \right)$  maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\alpha \frac{U_\infty l}{\nu}}{l U_\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
 u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\alpha}{\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

Diberikan parameter non-dimensional  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$  sehingga didapatkan persamaan energi non-dimensional sebagai berikut:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

### LAMPIRAN 3

#### PENGUBAHAN PERSAMAAN NON-DIMENSIONAL KE PERSAMAAN SIMILARITAS

Selanjutnya persamaan pembangun non-dimensional diubah ke persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir sebagai berikut :

$$\psi = U_{\infty} x v (2)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} \quad \eta = \left( \frac{U_{\infty}}{2 x v} \right)^{\frac{1}{2}} y$$

dengan

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dengan menggunakan fungsi alir maka didapatkan :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ (2 U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \right] \\ &= (2 U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} (f(\eta)) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= (2 U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} \cdot f' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2 x v} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= U_{\infty} \cdot f' \end{aligned}$$

dan kecepatan sumbu y :

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \left[ (2 U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \right] \\ &= -\left[ \frac{1}{2} (2 U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot f + (2 U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} \cdot f' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2 v} \right)^{\frac{1}{2}} y \cdot \left( -\frac{1}{2 x \sqrt{x}} \right) \right] \\ &= -\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2 U_{\infty} v}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot f + (2 U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} \cdot f' \cdot \eta \cdot \left( -\frac{1}{2 x} \right) \right] \\ &= -\left( \frac{2 U_{\infty} v}{4 x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot f - \left( \frac{2 U_{\infty} v}{4 x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot f' \cdot \eta \\ &= -\left( \frac{U_{\infty} v}{2 x} \right)^{\frac{1}{2}} (f - f' \cdot \eta) \end{aligned}$$

Untuk mencari persamaan kontinuitas, momentum, dan energi diperlukan penurunan kecepatan terhadap sumbu  $\bar{x}$  dan sumbu  $\bar{y}$ :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{\partial u}{\partial x} &= U_{\infty} \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2v}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) \\
 &= U_{\infty} \cdot f'' \cdot \eta \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) \\
 &= -\frac{U_{\infty}}{2x} \cdot f'' \cdot \eta \\
 \text{b) } \frac{\partial v}{\partial y} &= \left[ -\left(\frac{U_{\infty}v}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (f - f' \cdot \eta) \right] \\
 &= -\left(\frac{U_{\infty}v}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ f' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} - \left( f'' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \eta + f' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \\
 &= -\left(\frac{U_{\infty}v}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ f' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} - f'' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \eta - f' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{U_{\infty}}{2x} \cdot f'' \cdot \eta
 \end{aligned}$$

#### LAMPIRAN 3.a

Persamaan kontinuitas :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

dengan memasukkan fungsi alir ke dalam persamaan kontinuitas didapat :

$$-\frac{U_{\infty}}{2x} \cdot f'' \cdot \eta + \frac{U_{\infty}}{2x} \cdot f'' \cdot \eta = 0$$

#### LAMPIRAN 3.b

Untuk persamaan momentum :

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \\
 &\quad \lambda \theta - \mu u + K_1 N H
 \end{aligned}$$

Penurunan kecepatan ( $u, v$ ) dengan fungsi alir :

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= \left( U_{\infty} \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 2. \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (U_{\infty} \cdot f') \\
 &= U_{\infty} \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2v}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U_{\infty} \cdot f'' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot \left( -\frac{1}{2x} \right) \\
&= \left( -\frac{U_{\infty}}{2x} \right) \cdot f'' \cdot \eta \\
3. \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= \left( U_{\infty} \cdot f''' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2xv} \right) \right) \\
4. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( U_{\infty} \cdot f'' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( U_{\infty} \cdot f''' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( U_{\infty} \cdot f''' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2xv} \right) \right) \right) \\
&= \left( \left( \frac{U_{\infty}^2}{2v} \right) \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot f''' \right) + \left( \frac{U_{\infty}^2}{2xv} \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2v} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot f'''' \cdot \left( -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) \right) \\
&= \left( \left( \frac{U_{\infty}^2}{2v} \right) \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot f''' \right) + \left( \left( \frac{U_{\infty}^2}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'''' \cdot \left( -\frac{1}{2x} \right) \right) \\
5. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} &= \left( U_{\infty} \cdot f'''' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2xv} \right) \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
6. \quad \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{U_{\infty}}{2x} \right) \cdot \eta \cdot f'' \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{U_{\infty}}{2x} \right) \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot f'' \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
u' &= \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \\
v' &= f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \\
u'v + uv' &= \left(\left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot f''\right) + \left(\left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot f'' + \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right) \cdot y \cdot f''' \\
7. \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) &= \left(U_\infty \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \left(\left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot f'' + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right) \cdot y \cdot f'''\right) \\
&= \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) \cdot (f'')^2 \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)\right) + \\
&\quad \left(U_\infty \cdot f'' \cdot f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)\right) \\
&= \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) \cdot (f'')^2 \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)\right) + \\
&\quad \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f'''\right)
\end{aligned}$$

dengan menguraikan suku-suku pada persamaan (4.14) didapat persamaan-persamaan berikut:

- a.  $\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) (f \cdot f'')$
- b.  $\frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right] = \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{U_\infty^2}{2xv}\right) \cdot f'''$

$$\begin{aligned}
\text{c. } \frac{k_0}{\rho} & \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = \\
& \frac{k_0}{\rho} \left[ \left( (U_\infty \cdot f') \left( \frac{U_\infty^2}{2v} \right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot f'''' + \frac{U_\infty^2}{2xv} \cdot \eta \cdot f'''' \left( -\frac{1}{2x} \right) \right) + \right. \\
& \left( \left( -\left( \frac{U_\infty \cdot v}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot (f - f' \cdot \eta) \left( \frac{U_\infty^2}{2xv} \cdot f'''' \cdot \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) + \\
& \left( \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) (f'')^2 \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) + \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f''' \right) + \\
& \left. \left( \left( -\frac{U_\infty^2}{2x} \right) \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f''' \right) \right]
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan persamaan-persamaan (a), (b) dan (c) ke persamaan momentum maka didapat:

$$\begin{aligned}
-\left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) (f \cdot f'') &= \frac{\mu_0}{\rho} \cdot \left( \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \cdot f'''' \right) - \right. \\
& \frac{k_0}{\rho} \left[ (U_\infty \cdot f') \left( \left( \frac{U_\infty^2}{2v} \right) \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot f'''' + \right. \right. \\
& \left. \left( \frac{U_\infty^2}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'''' \cdot \left( -\frac{1}{2x} \right) \right) + \left( -\left( \frac{U_\infty}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (f - \right. \\
& \left. f' \cdot \eta) \right) \left( \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot f'''' \cdot \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \\
& \left( \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot (f'')^2 \cdot \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) + \right. \\
& \left. \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f''' \right) + \\
& \left. \left( -\left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot (f'')^2 \cdot \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f''' \right) + \lambda \theta - \frac{1}{\rho} \sigma_u \beta_0^2 + \\
& K_1 NH \\
- \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) (f \cdot f'') &= \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot f''' - \left( \frac{U_\infty^2}{2x} \right) \\
& \frac{k_0}{\rho} \left[ \left( U_\infty \cdot f' \right) \left( -\frac{1}{xv} \cdot f''' + \left( -\frac{1}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'''' \right) + \right. \\
& \left. \left( \left( -\frac{U_\infty}{2xv} \right) (f - f' \cdot \eta) \cdot f'''' \right) + \right. \\
& \left. \left( (f'')^2 \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) \right) \right] + \lambda \theta - M \cdot f' + K_1 NH \\
- (f \cdot f'') &= f''' - \frac{k_0}{\rho} \left[ \left( U_\infty \cdot f' \right) \left( -\frac{1}{xv} \cdot f''' + \left( -\frac{1}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'''' \right) + \right. \\
& \left. \left( \left( -\frac{U_\infty}{2xv} \right) (f - f' \cdot \eta) \cdot f'''' \right) + \left( (f'')^2 \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) \right) \right] + \lambda \theta - \\
& M \cdot f' + K_1 NH \\
- (f \cdot f'') &= f''' - \frac{k_0}{\rho} \left( \frac{U_\infty}{2xv} \right) [-2 \cdot f' \cdot f''' + f' \cdot \eta \cdot f'''' - f \cdot f'''' + \\
& f' \cdot \eta \cdot f'''' + (f'')^2] + \lambda \theta - M \cdot f' + K_1 NH \\
\text{dengan } \frac{k_0}{\rho} \left( \frac{U_\infty}{xv} \right) &= K, \text{ maka} \\
- (f \cdot f'') &= f''' + K[2 \cdot f' \cdot f''' - f \cdot f'''' - (f'')^2] + \lambda \theta - M \cdot f' + \\
& K_1 NH \\
f \cdot f'' + f''' &+ K[2 \cdot f' \cdot f''' - f \cdot f'''' - (f'')^2] + \lambda \theta - M \cdot f' + \\
& K_1 NH = 0
\end{aligned}$$

Sehingga didapat persamaan non-dimensional untuk momentum sebagai berikut :

$$f''' + f f'' + K[2 f' f''' - f f'''' - (f'')^2] + \lambda \theta - M f' + K_1 NH = 0$$

## LAMPIRAN 2.c

Untuk persamaan energi:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned} (U_{\infty} \cdot f') \left( (T_W - T_{\infty}) \cdot \theta' \cdot \left( -\frac{1}{2x} \right) \cdot \eta \right) + \left[ \left( -\left( \frac{U_{\infty} v}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} (f - \right. \right. \\ \left. \left. f' \cdot \eta) \right) \left( \theta' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2vx} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (T_W - T_{\infty}) \right) \right] = \alpha (T_W - T_{\infty}) \cdot \theta'' \cdot \left( \frac{U_{\infty}}{2vx} \right) \\ (T_W - T_{\infty}) \left[ (U_{\infty} \cdot f') \cdot \theta' \cdot \left( -\frac{1}{2x} \right) \cdot \eta + \left( -\left( \frac{U_{\infty}}{2x} \right) (f - f' \cdot \eta) \cdot \theta' \right) \right] = \\ \frac{\alpha}{v} \cdot (T_W - T_{\infty}) \cdot \theta'' \left( \frac{U_{\infty}}{2x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{U_{\infty}}{2x} \right) \left[ (U_{\infty} \cdot f') \cdot \theta' \cdot \left( \frac{1}{2x} \right) \cdot \eta \cdot \left( \frac{2x}{U_{\infty}} \right) - f \theta' - f' \cdot \eta \cdot \theta' \right] = \\ \left( \frac{U_{\infty}}{2x} \right) \frac{1}{(T_W - T_{\infty})} \left[ \frac{\alpha}{v} \cdot (T_W - T_{\infty}) \cdot \theta'' \right] \end{aligned}$$

$$\left[ (U_{\infty} \cdot f') \cdot \theta' \cdot \left( \frac{1}{2x} \right) \cdot \eta \cdot \left( \frac{2x}{U_{\infty}} \right) - f \theta' - f' \cdot \eta \cdot \theta' \right] = \frac{\alpha}{v} \cdot \theta''$$

$$-f \theta' = \frac{1}{Pr} \theta''$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' = 0$$

## LAMPIRAN 4

**Source Code program menggunakan software MATLAB**

```
clear all
clc
close all
format long
np = 300;
nr=np+1;
lambda=1;
K1=6;
H=0.1;

%parameter non dimensional
pr=0.7; %input('input the Prandtl number = ');
K=1;      %input('input the Viscoelastic parameter = ');
M=1;  %input('input the Magnetic parameter = ');
%N=1; %input('input the Density Particle Suspended number = ');

dely = 0.02;
y(1) = 0.0;
yc(1) = 0.0;
etu(1)=0.0;

%% Variasi Number Densitas Partikel Suspensi
Densitas_Partikel_Suspensi(1) = 0.1;
Densitas_Partikel_Suspensi(2) = 0.2;
Densitas_Partikel_Suspensi(3) = 0.3;
Densitas_Partikel_Suspensi(4) = 0.4;

for j = 2:nr
    y(j) = y(j-1) + dely;
    yc(j) = 0.5*(y(j) + y(j-1));
end

for j=1:np
```

```

    etu(j)=y(j);
end

for i=1:4
    N=Densitas_Partikel_Suspensi(i);

    k=1;
    stop = 1;
    while stop > 0.00001

        for j=1:np
            % Initial Condition
            f(j,1)=y(j)*erf(0.5*y(j))+(2\sqrt(pi)) *(exp(-0.25*((y(j))^2))-1);
            u(j,1)=erf(0.5*y(j));
            v(j,1)=(1/sqrt(pi))*exp(-0.25*((y(j))^2));
            w(j,1)= -(y(j)/y(j+1))^2+1 ;
            s(j,1)= -erf(0.5*(sqrt(pr))*y(j)) + 1;
            t(j,1)=-sqrt(pr/pi)*exp(0.25*pr*(y(j)^2));
        end

        for j = 2:np
            fb(j,k)=0.5*(f(j,k)+f(j-1,k));
            ub(j,k)=0.5*(u(j,k)+u(j-1,k));
            vb(j,k)=0.5*(v(j,k)+v(j-1,k));
            wb(j,k)=0.5*(w(j,k)+w(j-1,k));
            sb(j,k)=0.5*(s(j,k)+s(j-1,k));
            tb(j,k)=0.5*(t(j,k)+t(j-1,k));

            dervb(j,k) = (v(j,k)-v(j-1,k))/dely;
            derwb(j,k) = (w(j,k)-w(j-1,k))/dely;
            fvfjb(j,k) = fb(j,k)*vb(j,k);
            ftftb(j,k) = fb(j,k)*tb(j,k);
            uwuwb(j,k) = ub(j,k)*wb(j,k);
            unb(j,k) = (ub(j,k))^2;
            vnb(j,k) = (vb(j,k))^2;

```

```

dertb(j,k) = (t(j,k)-t(j-1,k))/dely;
ftftb(j,k) = fb(j,k)*tb(j,k);

```

```

a1(j,k) = dely*(0.5+K*ub(j,k))-(K*fb(j,k));
a2(j,k) = a1(j,k)+2*(K*fb(j,k));
a3(j,k) = 0.5*dely*(fb(j,k)-(K*vb(j,k)));
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = ((dely/2)*vb(j,k))-(K*0.5*(w(j,k)-w(j-1,k)));
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = -dely*(0.5*M-(K*wb(j,k)/2));
a8(j,k) = a7(j,k);
a9(j,k) = (dely/2);
a10(j,k) = a9(j,k);

```

```

b1(j,k) = (1/pr)+(dely*fb(j,k)/2);
b2(j,k) = b1(j,k)-(2/pr);
b3(j,k) = dely*tb(j,k)/2;
b4(j,k) = b3(j,k);

```

```

r1(j,k) = -f(j,k)+f(j-1,k)+dely*ub(j,k);
r2(j,k) = -u(j,k)+u(j-1,k)+dely*vb(j,k);
r3(j,k) = -v(j,k)+v(j-1,k)+dely*wb(j,k);
r4(j,k) = -s(j,k)+s(j-1,k)+dely*tb(j,k);
r5(j,k) = -(dely*wb(j,k)) -(dely*fvf vb(j,k))+ (dely*M*ub(j,k))-
(2*(K1*N*H))-
(2*K*dely*uwuwb(j,k))+(K*fb(j,k)*(w(j,k)-w(j-
1,k)))+(K*vnb(j,k)*dely)-(lambda*dely*sb(j,k));
r6(j,k) = -((1/pr)*(t(j,k)-t(j-1,k)))-(dely*ftftb(j,k));

```

```

end

```

```

% Matrices

```

```

a{2,k} = [0 0 0 1 0 0; -0.5*dely 0 0 0 0 0; -1 -0.5*dely 0 0 -0.5*dely
0; 0 0 -0.5*dely 0 0 -0.5*dely; a4(2,k) a2(2,k) 0 a5(2,k)
a1(2,k) 0; 0 0 b2(2,k) b3(2,k) 0 b1(2,k)];

```

```

for j=3:np
    a{j,k}=[-0.5*dely 0 0 1 0 0; -1 -0.5*dely 0 0 0 0;0 -1 0 0 -
            0.5*dely 0;0 0 -1 0 0 -0.5*dely;a8(j,k) a4(j,k)
            a10(j,k) a5(j,k) a1(j,k) 0;0 0 0 b3(j,k) 0 b1(j,k)];
    b{j,k}=[0 0 0 -1 0 0; 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 -0.5*dely 0;0 0 0 0 0 -
            0.5*dely;0 0 0 a6(j,k) a2(j,k) 0;0 0 0 b4(j,k) 0
            b2(j,k)];
end

for j=2:np
    c{j,k}=[-0.5*dely 0 0 0 0 0;1 -0.5*dely 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0
            0 1 0 0 0; a7(j,k) a3(j,k) a9(j,k) 0 0 0;0 0 0 0 0 0];
end
    alfa{2,k}=a{2,k};
    gamma{2,k}=inv(alfa{2,k})*c{2,k};
for j=3:np
    alfa{j,k}=a{j,k}-(b{j,k}*gamma{j-1,k});
    gamma{j,k}=inv(alfa{j,k})*c{j,k};
end

for j=2:np
    rr{j,k}=[r1(j,k);r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k);r6(j,k)];
end
    www{2,k}=inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
for j=3:np
    www{j,k}=inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}-(b{j,k}*www{j-1,k}));
end

%% backward sweep
delf(1,k)=0.0;
delu(1,k)=0.0;
delv(1,k)=0.0;
dels(1,k)=0.0;
delu(np,k)=0.0;
delv(np,k)=0.0;

```



```

dels(np,k)=0.0;
dell{np,k}=www{np,k};

for j=np-1:-1:2
dell{j,k}=www{j,k}(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
end

delv(1,k)=dell{2,k}(1,1);
delw(1,k)=dell{2,k}(2,1);
delt(1,k)=dell{2,k}(3,1);
delf(2,k)=dell{2,k}(4,1);
delw(2,k)=dell{2,k}(5,1);
delt(2,k)=dell{2,k}(6,1);

for j = np:-1:3
    delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
    delv(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
    dels(j-1,k) = dell{j,k}(3,1);
    delf(j,k) = dell{j,k}(4,1);
    delw(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    delt(j,k) = dell{j,k}(6,1);
end

%% Newton's Method
for j=1:np
    u(j,k+1)=u(j,k)+delu(j,k);
    v(j,k+1)=v(j,k)+delv(j,k);
    s(j,k+1)=s(j,k)+dels(j,k);
    f(j,k+1)=f(j,k)+delf(j,k);
    w(j,k+1)=w(j,k)+delw(j,k);
    t(j,k+1)=t(j,k)+delt(j,k);
end;
stop = abs(delv(1,k));
kmax = k;
k = k + 1;

```

```

end
for j = 1:np
    ff(j)=f(j,k);
    uu(j)=u(j,k);
    vv(j)=v(j,k);
    ww(j)=w(j,k);
    ss(j)=s(j,k);
    tt(j)=t(j,k);
end

for j=1:np
    ffb(j)=fb(j,kmax);
    uub(j)=ub(j,kmax);
    vvb(j)=vb(j,kmax);
    ww(b(j)=wb(j,kmax);
    ssb(j)=sb(j,kmax);
    ttb(j)=tb(j,kmax);
    dderwb(j)=derwb(j,kmax);
    dder(b(j) = dertb(j,kmax);
end

if(i==1)
    figure(1)
    plot(etu,u(:,kmax),'-g')
    hold on;
    figure(2)
    plot(etu,s(:,kmax),'-g')
    hold on;

elseif(i==2)
    figure(1)
    plot(etu,u(:,kmax),'-b')
    hold on;
    figure(2)
    plot(etu,s(:,kmax),'-b')

```

```
hold on;
```

```
elseif(i==3)
```

```
figure(1)
```

```
plot(etu,u(:,kmax),'-m')
```

```
hold on;
```

```
figure(2)
```

```
plot(etu,s(:,kmax),'-m')
```

```
hold on;
```

```
elseif(i==4)
```

```
figure(1)
```

```
plot(etu,u(:,kmax),'-black')
```

```
hold on;
```

```
grid on;
```

```
title('Profil Kecepatan dengan Variasi Number Densitas Partikel  
Suspensi')
```

```
legend('Number Densitas Partikel Suspensi = 0.1','Number  
Densitas Partikel Suspensi = 0.2','Number Densitas  
Partikel Suspensi = 0.3','Number Densitas Partikel  
Suspensi = 0.4')
```

```
xlabel('y')
```

```
ylabel(' Kecepatan ')
```

```
figure(2)
```

```
plot(etu,s(:,kmax),'-black')
```

```
hold on;
```

```
grid on;
```

```
title('Profil Temperatur dengan Variasi Number Densitas Partikel  
Suspensi')
```

```
legend('Number Densitas Partikel Suspensi = 0.1','Number  
Densitas Partikel Suspensi = 0.2','Number Densitas
```

```
Partikel Suspensi = 0.3','Number Densitas Partikel  
Suspensi = 0.4')  
  
xlabel('y')  
ylabel('Temperatur')  
end  
end
```

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB V PENUTUP

Pada bab ini akan diuraikan beberapa hal yang dapat disimpulkan dari penyelesaian tugas akhir ini sekaligus saran untuk penelitian selanjutnya

### 5.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian ini maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik viskoelastis tersuspensi yang melewati pelat datar dalam kondisi *steady* pada titik stagnasi ( $x \approx 0$ ) yaitu :

- a. 
$$\mathcal{U} + f\mathcal{V} + K(2\mathcal{U}\mathcal{W} - f\mathcal{W}' - (\mathcal{V})^2) + \lambda s - M\mathcal{U} + K_1NH = 0$$

- b. 
$$\frac{1}{Pr}\mathcal{T}' + f\mathcal{T} = 0$$

Model yang didapatkan tersebut diselesaikan secara numerik dengan metode Keller-Box dengan langkah-langkah :

1. Mengubah persamaan diferensial orde tinggi menjadi orde satu
  2. Diskritisasi model matematika
  3. Linierisasi dengan *Newton Method*
  4. Teknik Eliminasi Blok
2. Dari penyelesaian numerik dan simulasi dalam bentuk grafik, dapat disimpulkan bahwa :
  - a. Nilai profil kecepatan dengan variasi parameter viskoelastik ( $K$ )=1,2,3,4 dengan nilai  $Pr = 0.7$  ,  $M = 1$  ,  $N = 1$  ,  $\lambda = 1$  , dan  $H = 0.1$  akan meningkat dengan menurunnya parameter viskoelastik, sedangkan temperatur akan mengalami penurunan. Hal ini terjadi karena dengan menurunnya parameter viskoelastik ( $K$ )

maka kekentalan akan mengalami penurunan dan mengurangi gaya gesek menurun.

- b. Untuk profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik( $M$ )=0.1,3,7,10 dengan nilai  $Pr = 0.7$ ,  $K = 1$ ,  $N = 1$ ,  $\lambda = 1$ , dan  $H = 0.1$  akan menurun dan profil temperatur ( $\theta$ ) akan meningkat dengan meningkatnya parameter magnetik ( $M$ ). Hal ini terjadi karena dengan adanya medan magnet maka akan menimbulkan gaya Lorentz, dan dengan meningkatnya gaya Lorentz maka akan memperbesar gesekan dan menimbulkan kecepatan menurun dan temperatur mengalami peningkatan.
- c. Dengan menurunnya variasi bilangan Prandtl untuk variasi bilangan Prandtl ( $Pr$ )=0.7,1,20,100 dengan nilai  $K = 1$ ,  $M = 1$ ,  $N = 1$ ,  $\lambda = 1$ , dan  $H = 0.1$  maka kecepatan dan temperature akan meningkat. Hal ini sesuai dengan definisi bilangan Prandtl ( $Pr$ ) dan bilangan Prandtl berbanding terbalik dengan diffuse termal ( $Pr \sim \frac{1}{\alpha}$ ).
- d. Dalam variasi nilai densitas partikel suspensi( $N$ )= 0.1,0.2,0.3,0.4 dengan nilai  $Pr = 0.7$ ,  $K = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\lambda = 1$ , dan  $H = 0.1$  ditunjukkan bahwa dengan meningkatnya nilai densitas partikel suspensi ( $N$ ) maka profil kecepatan ( $f'$ ) akan meningkat dan profil temperatur ( $\theta$ ) akan mengalami penurunan. Hal ini terjadi karena dengan meningkatnya nilai densitas partikel suspensi ( $N$ ) maka kerapatan fluida akan meningkat, dengan meningkatnya kerapatan, maka jumlah partikel akan semakin banyak sehingga gerakan yang dihasilkan oleh partikel semakin besar, hal ini menyebabkan kecepatan semakin meningkat dan temperatur menurun.

## 5.2 Saran

Adapun saran yang diberikan dari penelitian ini untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut ;

1. Sebaiknya fluida melewati benda yang lebih bervariasi selain pelat datar.
2. Sebaiknya penelitian dilakukan dalam keadaan unsteady.
3. Diharapkan menggunakan metode yang lain selain Keller-Box.
4. Sebaiknya ditunjukkan distribusi skin friction dan temperature dinding untuk mengetahui profil kecepatan dan temperature tepat pada permukaan pelat datar.
5. Diharapkan melakukan penelitian mengenai konveksi campuran.



*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alkasasbeh, Hamzeh T. S (2015). *Numerical Solution for Convective Boundary Layer Flow Over A Solid Sphere Of Newtonian and Non-Newtonian Fluid*, Ph.D. Universiti Malaysia Pahang.
- [2] GUPTA, Urvashi and AGGARWAL, parul. (2011), *Thermal Instability of Compressible Walters' (Model B) Fluid in the Presence of Hall Currents and Suspended Particles*, THERMAL SCIENCE,.15,2,pp 487-500.
- [3] Nazar,R., Salleh, M.Z., dan Pop, I. (2010). *Mixed convection boundary layer flow about a solid sphere with Newtonian heating*, Arch. Mech., 62,4,pp 283-303, Warszawa.
- [4] Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*. ITS Press, Surabaya, Indonesia.
- [5] Widodo, B., Siswono, G.O., dan Imron, C. (2015), *Viskoelastic fluid flow with the presence of magnetic field past a porous circular cylinder*. Proceedings of 5<sup>th</sup> ISERD International Conference, Bangkok, Thailand.
- [6] Widodo, B., Wanti, P.P., dan Imron, C. (2015). *Viscoelastic Fluid Past A Flat Plate With The Effect of Magnetohydrodynamic*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Surabaya.
- [7] Kasim, Abdul Rahman Muhd. (2014). *Convective Boundary Layer Flow of Viscoelastic Fluid.*, Phd.Universiti Tekno;ogi Malaysia. Malaysia.
- [8] Yusuf, R., Kironoto, B.A., Rahardjo, A.P.(1997). *Pengukuran dan Prediksi Distribusi Sedimen Suspensi pada Saluran Terbuka*. Jurnal Sipil soepra. Semarang.

- [9] Widodo, B., Sulistyaningtyas, Annisa D., Imron, C. (2015). Pengaruh Aliran Fluida *Viskoelastik yang Melewati Silinder Eeliptik*. Institut teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Surabaya.
- [10] Rumite, W., Widodo, B., Imron, C.(2015). *Aliran Fluida Viskoelastik yang Melewati Permukaan Sebuah Bola dengan Pengaruh Konveksi Bebas*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Surabaya.
- [11] Widodo, B., Anggriani, I., Khalimah, D.A.,Zainal, F.D.S., Imron, C.(2016). *Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics in Micropolar Fluid Past a Sphere*. Far East Journal of Mathematical Sciences(FJMS), volume 100, number 2, pages 291-299.
- [12] Mohamed, M.K.A., Salleh, M.Z., Husssanan, A., Sarif, N.M., Noar, N.A.Z.M.N., Ishak, A., and Widodo, B.(2016). *Mathematical Model of Free Convection Boundary Layer Flow on Solid Sphere with Viscous Dissipation and Thermal Radiation*. International Jurnal of Computing Science and Applied Mathematics, Vol. 2, No. 2.
- [13] Mohammad, N.F. (2014), *Unsteady Magnetohydrodynamics Convective Boundary Layer Flow Past A Sphere in Viscous and Micropolar Fluids*. Universiti Teknologi Malaysia. Malaysia.

## BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Rina Sahaya atau biasa dipanggil Rina. Lahir di Bojonegoro pada tanggal 31 Desember 1994 dan merupakan anak tunggal dari Bapak Abdul Manaf dan Ibu Kasmonah. Penulis berasal dari Kota Bojonegoro, bertempat tinggal di Rt/Rw 03/05 Ds. Kedungrejo, Kec. Kedungadem, Kab. Bojonegoro. Pendidikan formal yang pernah ditempuh yaitu SD Negeri Kedungrejo II, SMP Negeri 1 Sugihwaras, dan SMA

Negeri 1 Sugihwaras. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan S1 di jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Tulis pada tahun 2012.

Pada masa perkuliahan penulis memilih Matematika Terapan sebagai bidang keahliannya. Penulis juga aktif dalam kegiatan non-akademis yaitu di organisasi HIMATIKA ITS, tepatnya pada Departemen Kesejahteraan Mahasiswa pada tahun 2014-2015.

Selama penulisan tugas akhir ini Penulis tidak lepas dari kekurangan, untuk itu penulis mengharapkan kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini yang dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke [rina.sahaya@gmail.com](mailto:rina.sahaya@gmail.com).